

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**CARLOS ALBERTO COELHO JOUSSEPH**

**Propriedades do Mapa Padrão na Transição  
do Conservativo para o Dissipativo**

CURITIBA

2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**CARLOS ALBERTO COELHO JOUSSEPH**

**Propriedades do Mapa Padrão na Transição  
do Conservativo para o Dissipativo**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Werner Beims.

CURITIBA

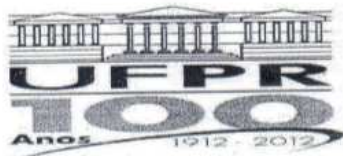
2014

Jousseph, Carlos Alberto Coelho  
Propriedades do mapa padrão na transição do conservativo para o dissipativo / Carlos Alberto Coelho Jousseph. – Curitiba, 2014.  
104 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós Graduação em Física  
Orientador: Marcus Werner Beims  
Bibliografia: p. 98-104

1. Mapas. 2. Dissipação. 3. Sistemas dinâmicos. I. Beims, Marcus Werner. II. Título.

CDD 515.352



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

## PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Tese de Doutorado do aluno CARLOS ALBERTO COELHO JOUSSEPH, consideram aprovada a redação final da tese, cujo título é: *"Propriedades do mapa padrão na transição do dissipativo para o conservativo"*.

Curitiba, 31 de outubro de 2014.

### Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcus Werner Beims  
(UFPR)

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana  
(UFPR)

Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes  
(UFPR)

Prof. Dr. César Manchein  
(UNESC)

Prof. Dr. Edson Denis Leonel  
(UNESP – Rio Claro/SP)

Assinatura

Marcus W.B.

R. Viana

Sergio Roberto Lopes

César Manchein

Edson Denis Leonel



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

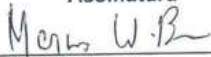

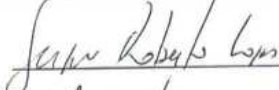
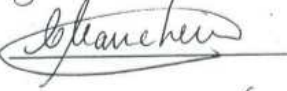

### DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

Propriedades do mapa padrão na transição do dissipativo para o conservativo

ALUNO

CARLOS ALBERTO COELHO JOUSSEPH

Em sessão pública iniciada às quatorze horas do dia 31 de outubro de 2014, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu APROVAR o candidato com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. César Manchein (UDESC)		<u>A</u>
Prof. Dr. Edson Denis Leonel (UNESP - Rio Claro/SP)		<u>A</u>

*“Aos meus pais, irmãos e a Deus”*

# Agradecimentos

Gostaria agradecer a todos que contribuíram com a realização deste trabalho pois, sem eles, eu jamais teria condições de concluir mais esta etapa da minha vida.

Agradeço,

- a Deus.
- aos meus pais, Dalva e Rupen, e aos meus irmãos, Augusto e Deise, que me acompanharam neste processo dando força e incentivo. Eles sempre acreditaram no sucesso dos meus trabalhos e me ensinaram que, por mais difícil que seja o caminho, deve ser seguido sempre com honestidade, dedicação e muita fé em Deus.
- ao meu orientador, Marcus W. Beims, pelo tempo gasto com muita atenção e paciência em 8 anos de orientação que compreendem os anos de iniciação científica (1999 a 2002) e os anos de doutoramento (2010 a 2014).
- ao Departamento de Pós-Graduação em Física da UFPR por me dar a oportunidade de fazer parte do corpo discente por este período de doutoramento.
- ao Prof. Dr. Sergio R. Lopes pelos trabalhos em cooperação e ao Prof. Dr. Carlos de Carvalho pelo suporte computacional.
- a todos os professores que tive a honra de cursar as disciplinas de Graduação e Pós-Graduação.
- aos amigos de Graduação e Pós-Graduação.
- aos colegas de sala, do grupo e de todo departamento.

# Resumo

Esta tese tem como tema principal estudar os efeitos causados devido a inclusão de um termo de dissipação em sistemas dinâmicos não-lineares. Em geral, o espaço de fases de um sistema dinâmico capaz de descrever um sistema físico realístico, apresenta coexistência de estruturas regulares e caóticas. A presença da dissipação provoca a quebra de torus irracionais e faz com que as ilhas regulares percam suas formas. Uma descrição detalhada sobre os efeitos provocados pela dissipação é feita nesta tese com o uso dos expoentes de Lyapunov a tempos finitos (ELTFs), que quantifica a divergência/convergência exponencial das trajetórias. A razão de uma trajetória dissipativa convergir para um atrator e não outro, depende da dissipação utilizada e de uma possível hierarquia com a ordem das ilhas ressonantes. Para as trajetórias iniciadas em regiões ressonantes de mesma ordem, os caminhos escolhidos pelas trajetórias dissipativas tem ligações com regiões hiperbólicas existentes no espaço de fases, um estudo ainda em andamento. Os ELTFs foram utilizados para mostrar as formações das ilhas regulares em meio às regiões caóticas em função do parâmetro de não-linearidade do mapa padrão. Eles também foram utilizados para determinar os parâmetros para os quais as trajetórias dissipativas mudam de atratores. O aparecimento de picos nos valores negativos dos ELTFs, indicam quais são os parâmetros que fazem os atratores deixarem de existir, o que leva a trajetória a escolher outro atrator.

**Palavras-Chave:** Mapa padrão, conservativo, dissipação, expoentes de Lyapunov a tempos finitos, hiperbolicidade.



# Abstract

*This thesis aims to study dissipation effects in typical nonlinear dynamical system. Usually, the dynamics of a realistic physical system exhibits the coexistence of regular and chaotic structures in phase space. The presence of dissipation induces the breaking of the invariant torus and the regular islands loose their shapes. A detailed description of the dissipation effects performed by using the finite time Lyapunov exponents (FTLEs), that quantify the exponential divergence/convergence of nearby trajectories. The reason why dissipative trajectories converge to a particular attractor (and not to another), depends on the considered dissipation and a possible hierarchy relative to the order of the resonant island. For trajectories starting close to resonant regions of the same order, the paths followed by the dissipative trajectories are related to existing hyperbolic regions in the phase space, a work still in progress. The FTLEs were also used to identify those parameters inducing the dissipative trajectories to jump abruptly from one attractor to another. The appearance of peaks amid negative FLTEs, indicates the parameters which make the attractors vanish, inducing the trajectories to find new attractors.*

**Key-Words:** *Standard map, conservative, dissipative, finite time Lyapunov exponent, hyperbolicity.*

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Introdução Teórica</b>	<b>15</b>
2.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	15
2.2	Sistemas Hamiltonianos . . . . .	17
2.2.1	Sistemas Integráveis . . . . .	18
2.2.2	Sistemas quase Integráveis . . . . .	20
2.3	Mapas e Seções de Poincaré . . . . .	24
2.3.1	Estabilidades em Mapas Unidimensionais . . . . .	26
2.3.2	Estabilidades em Mapas Bidimensionais . . . . .	28
2.3.3	Mapa Padrão . . . . .	32
2.3.4	Mapa Padrão Conservativo . . . . .	34
2.3.5	Mapa Padrão Dissipativo . . . . .	36
2.4	Expoente de Lyapunov a Tempos Finitos . . . . .	38
2.4.1	Reortonormalização de Gram-Schmidt . . . . .	42
2.5	Movimento no Retrato de Fases . . . . .	44
2.5.1	Teorema KAM . . . . .	46
2.5.2	Variedades . . . . .	47
2.5.3	Teorema de Poincaré-Birkhoff . . . . .	48
2.5.4	Relação entre as ressonâncias . . . . .	51
2.6	Stickiness . . . . .	52
2.7	Hiperbolicidade . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Transição Conservativo-Dissipativo</b>	<b>58</b>
3.1	Mapa Padrão Conservativo . . . . .	58
3.1.1	Retrato de Fases . . . . .	58

3.1.2	Recorrência . . . . .	60
3.2	Mapa padrão dissipativo . . . . .	61
3.2.1	Constante de Feigenbaum . . . . .	62
3.2.2	O mapa . . . . .	63
3.3	Transição para o Dissipativo . . . . .	64
3.4	Expoente de Lyapunov a Tempos Finitos . . . . .	69
3.5	Convergência de Trajetórias . . . . .	74
3.6	Hierarquias . . . . .	79
3.7	Hiperbolicidade . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Aplicação: Dissipação em um Sistema de Spins</b>	<b>88</b>
4.1	Mapa do Modelo MNS . . . . .	89
4.1.1	Retrato de Fases . . . . .	90
4.1.2	Expoente de Lyapunov . . . . .	91
4.2	Mapa MNS Dissipativo . . . . .	93
4.2.1	Parâmetros . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>96</b>

# Lista de Figuras

1.1	(a) <i>Pêndulo sujeito a ação de um pulso gravitacional periódico.</i> (b) <i>Rotor pulsado. Sistemas físicos descritos pelo mapa padrão.</i> . . . . .	10
1.2	<i>Ampliação do espaço de fases do mapa padrão com parâmetro <math>k = 1, 3</math>. As curvas contínuas/pontilhadas representam os estados regulares enquanto que as regiões preenchidas aleatoriamente representam os estados caóticos. Para construção desta figura, foram dadas <math>10^4</math> iteradas com transiente nulo em cada uma das 200 condições iniciais realizadas ao longo da linha <math>p_0 = 0, 0</math> e <math>-0, 5 &lt; x_0 &lt; 0, 5</math>.</i> . . . . .	12
2.1	<i>Trajetoória no espaço de fases partindo de um estado <math>(p, q)</math> no tempo <math>t_1</math> para o estado <math>(p, q)</math> num tempo <math>t_2</math> [4].</i> . . . . .	17
2.2	<i>Ilustração do retrato de fases do pêndulo Hamiltoniano para 3 energias diferentes, maior (<math>E_1</math>), menor (<math>E_3</math>) e igual (<math>E_2</math>) a máxima energia potencial [4]. Um pêndulo com energia <math>E_1</math> executa um movimento de rotação, com <math>E_3</math>, um movimento de oscilação e, com <math>E_2</math>, executa um movimento intermediário entre a rotação e oscilação.</i> . . . . .	19
2.3	<i>Trajetoória no espaço de fases. Os círculos indicam o movimento em uma seção (de Poincaré) formada com <math>\theta_2</math> fixo [4].</i> . . . . .	21
2.4	<i>Ilustração de uma trajetória regular no espaço de fases cruzando com uma seção (superfície) definida para <math>\theta_2 = \text{constante}</math>. A Figura (a) ilustra uma trajetória genérica que cobre toda superfície de um torus. A Figura (b) ilustra uma trajetória fechada que cruza pontos periódicos primários no espaço de fases. A Figura (c) ilustra uma trajetória nas vizinhanças dos pontos ressonantes primários que gera uma região ressonante de ordem secundária. A Figura (d) ilustra uma trajetória que cruza pontos ressonantes de ordem secundária no espaço de fases.</i> . . . . .	22

2.5	<i>Ilustração do cruzamento entre uma trajetória caótica no espaço de fases com uma seção (superfície) definida para <math>\theta_2 = \text{constante}</math>. A Figura (a) ilustra uma região caótica entre duas curvas invariantes enquanto que a Figura (b) ilustra uma região caótica próxima de ilhas regulares. . . . .</i>	23
2.6	<i>Corte no espaço tridimensional, <math>\Omega</math>, exemplificando uma seção de Poincaré. Na figura, a trajetória <math>\vec{x}_0</math> é periódica quando <math>\vec{P}(\vec{x}_0^*) = \vec{x}_0^*</math>, indicando que o ponto <math>\vec{x}_0^*</math> é um ponto fixo. Quando <math>\vec{P}(\vec{x}_1) \neq \vec{x}_1</math>, a trajetória <math>\vec{x}_1</math> é não-periódica. . . . .</i>	25
2.7	<i>Convergência de duas trajetórias para um ponto fixo <math>x^*</math> de duas maneiras diferentes. Na Figura (a), a convergência é monotônica enquanto que na Figura (b), alternada (“flip”). . . . .</i>	27
2.8	<i>Ilustração da divergência entre duas trajetórias iniciadas próximas. Uma trajetória percorre a distância compreendida entre os pontos <math>x_0</math> e <math>x_1</math> e outra trajetória entre os pontos <math>y_0</math> a <math>y_1</math>. As trajetórias afastam-se/aproximam-se de uma distância <math>\delta</math> para <math>\delta'</math>. . . . .</i>	39
2.9	<i>Diagrama de bifurcação do mapa padrão dissipativo com o cálculo do expoente de Lyapunov. Na parte superior da figura está o diagrama de bifurcação do mapa padrão com parâmetro de dissipação <math>\gamma = 0,8</math>, enquanto que na parte inferior está o respectivo valor do expoente de Lyapunov para os mesmos valores do parâmetro de controle “k”. Em vermelho, na figura inferior, a linha nula. Para esta figura, foram dadas <math>10^3</math> condições iniciais na linha <math>5,5 \leq k \leq 5,85</math>, com <math>10^5</math> iteradas com transiente de <math>8 \times 10^4</math>, ou seja, foram considerados somente os últimos <math>2 \times 10^4</math> pontos. . . . .</i>	41
2.10	<i>Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para um caso 2D. . . . .</i>	43
2.11	<i>Superfície KAM formada pela deformação de um torus. O círculo de raio <math>J_0</math> indica o movimento não perturbado. Após perturbação, a curva deforma uma quantidade <math>\Delta J_1</math> [4]. . . . .</i>	46
2.12	<i>Ilustração do teorema de Poincaré-Birkhoff em que alguns pontos fixos são preservados após pequena perturbação [4]. . . . .</i>	49
2.13	<i>Ilustração dos pontos Hiperbólico (a) e Elíptico (b). . . . .</i>	50
2.14	<i>Ilustração de Pontos Hiperbólicos [4]. . . . .</i>	51

2.15	<i>Ampliação do retrato de fases <math>(x,p)</math> do mapa padrão com <math>k = 2,5</math>. As regiões mais escuras são exemplo do efeito de Stickiness em torno de ilhas regulares. Para construção desta figura, foram dadas <math>10^7</math> iteradas a partir da condição inicial no ponto caótico <math>(x_0; p_0) = (0, 2; 0, 3)</math>. . . . .</i>	53
3.1	<i>Retrato de fases do mapa padrão conservativo. Como condições iniciais, foram utilizados valores de <math>x_0</math> compreendidos no intervalo <math>[-0,5 \leq x_0 \leq 0,5]</math>, divididos de forma a ter 200 valores, e <math>p_0 = 0,0</math>. O valor do parâmetro que representa a intensidade do pulso do oscilador foi <math>k = 2,5</math> e o número de iteradas foi de <math>10^4</math> com transiente de <math>8 \times 10^3</math>. . . . .</i>	60
3.2	<i>Ampliação da região em destaque da Figura 3.1. O valor utilizado para o parâmetro <math>k</math> e os valores das condições iniciais <math>(x_0, p_0)</math> são os mesmos da figura anterior. . . . .</i>	61
3.3	<i>A figura superior mostra, no eixo das ordenadas, o tempo da primeira recorrência da linha <math>p = 0,0</math> e <math>x = [-0,5 : 0,0]</math> do mapa padrão conservativo, normalizado. A figura inferior é o retrato de fases neste intervalo. Como condição inicial foi utilizado o parâmetro <math>k = 2,5</math> e o número de iteradas limitado em <math>10^4</math>, de maneira que na figura, está normalizado entre 0,0 e 1,0. O raio de aproximação considerado foi de <math>\rho = 10^{-4}</math>. . . . .</i>	62
3.4	<i>Ampliação do diagrama de Bifurcação do mapa logístico. . . . .</i>	63
3.5	<i>Retrato de fases do mapa padrão dissipativo. Como condições iniciais, 200 valores no intervalo <math>[-0,5 \leq x_0 \leq 0,5]</math> e <math>p_0 = 0,0</math>. O parâmetro foi <math>k = 2,5</math> com <math>10^4</math> iteradas e <math>\gamma = 10^{-3}</math>. . . . .</i>	64
3.6	<i>Diferentes convergências de uma trajetória no retrato de fases em função da dissipação <math>\gamma</math>. Foi utilizado como condição inicial, <math>x_0 = -0,31</math>, <math>p_0 = 0,0</math> e <math>k = 2,5</math>. O caso conservativo é apresentado na Figura (a) enquanto que, na Figura (b), <math>\gamma = 10^{-4}</math> e na Figura (c), <math>\gamma = 10^{-1}</math>. Na Figura (d), <math>\gamma = 0,3</math> e a trajetória “salta” para a região da ilha maior. . . . .</i>	66
3.7	<i>Retrato de fases com diferentes <math>\gamma</math>'s. Para Figura (a) foi utilizado <math>\gamma = 10^{-1}</math>, enquanto que para figura (b), <math>\gamma = 0,3</math>. Como condição inicial, <math>k = 2,5</math>. . . . .</i>	67
3.8	<i>Ponto de convergência no espaço de fases, <math>x_f</math>, em função de <math>\gamma</math>. Condição inicial é única, dada por: <math>(x_0, p_0) = (-0,31; 0,0)</math> e <math>k = 2,5</math>. . . . .</i>	67

3.9	<i>Ampliação do retrato de fases em que são mostrados, em preto, toros conservativos e, em vermelho, a mesma ampliação do retrato de fases com <math>\gamma = 0,15</math>. Observa-se o deslocamento dos atratores em função de <math>\gamma</math>. Para esta figura, <math>k = 2,5</math>.</i>	68
3.10	<i>Convergência da posição final, <math>x_f</math>, em função da posição inicial, <math>x_0</math>, com 4 diferentes valores de <math>\gamma</math>. Na Figura (a), a linha vermelha está no ponto <math>x = -0,5</math> (centro da ilha de período 1) enquanto que a linha azul está no ponto <math>x = -0,32</math> (centro de uma das 4 ilhas de período 4). Para todos os casos, <math>p_0 = 0,0</math> e <math>k = 2,5</math>. Estas figuras foram geradas com <math>10^4</math> iteradas.</i>	69
3.11	<i>Convergência para zero do expoente de Lyapunov em função do tempo para duas condições iniciais <math>(x_0, p_0)</math> diferentes, porém, ambas com <math>\gamma = 0,0</math>. Verifica-se para trajetórias iniciadas nas ilhas regulares que, para pontos mais próximos do centro, o expoente de Lyapunov converge mais rapidamente a zero. A curva (a) foi reproduzida com condição inicial em <math>x_0 = -0,31</math> enquanto que a curva (b) em <math>x_0 = -0,315</math>. Para ambas, <math>p_0 = 0,0</math>. O centro da ilha está no ponto <math>(x, p) = (-0,32; 0,0)</math>.</i>	70
3.12	<i>Convergência do expoente de Lyapunov em função do tempo para diferentes <math>\gamma</math>'s. Quanto maior <math>\gamma</math>, <math>\lambda</math> diminui mais rapidamente. Na linha-(a) <math>\gamma = 0,0</math>, na linha-(b) <math>\gamma = 10^{-4}</math> e na linha-(c) <math>\gamma = 10^{-3}</math>. Para todos os casos, <math>(x_0, p_0) = (-0,31; 0,0)</math> e <math>k = 2,5</math>.</i>	71
3.13	<i>Expoente de Lyapunov <math>\lambda</math> em função de <math>k</math> e <math>x_0</math> para o mapa padrão conservativo. Como condição inicial, foi utilizado <math>p_0 = 0,0</math>. Esta figura é uma reprodução do trabalho de C. Manchein e M. Beims [13].</i>	72
3.14	<i>Expoente de Lyapunov <math>\lambda</math> em função de <math>k</math> e <math>x_0</math> para o mapa padrão conservativo. Para construção da figura, foi utilizado condição inicial <math>p_0 = 0,36</math>.</i>	73
3.15	<i>Expoente de Lyapunov, <math>\lambda</math>, em função de <math>k</math> e <math>x_0</math> com dissipação (a) <math>\gamma = 10^{-4}</math> e (b) <math>\gamma = 10^{-3}</math>. Para construção da figura, foi utilizado condição inicial <math>p_0 = 0,0</math>.</i>	74
3.16	<i>A figura mostra o comportamento do expoente de Lyapunov em função da dissipação <math>\gamma</math>. As condições iniciais utilizadas foram: <math>(x_0; p_0) = (-0,31; 0,0)</math> e <math>k = 2,5</math>.</i>	75

3.17	<i>Expoente de Lyapunov em função do parâmetro <math>k</math> e da condição inicial <math>p_0</math> para o mapa padrão conservativo. Para construção da figura, foi utilizado condição inicial <math>x_0 = 0, 0</math>.</i>	75
3.18	<i>Pontos finais (barra colorida) das trajetórias do mapa padrão conservativo em função da coordenada <math>x_0</math> e do parâmetro <math>k</math>. A linha escura está em <math>k = 2, 5</math> e a figura foi gerada após <math>10^4</math> iteradas.</i>	76
3.19	<i>Posição final das trajetórias do mapa padrão em função dos parâmetros <math>\gamma</math> e <math>x_0</math>. Como condições iniciais foram utilizados <math>p_0 = 0, 0</math>, <math>[-0, 5 &lt; x_0 &lt; 0, 5]</math> e <math>k = 2, 5</math>.</i>	77
3.20	<i>Ampliação da posição final das trajetórias do mapa padrão em função dos parâmetros <math>\gamma</math> e <math>x_0</math>. Como condições iniciais foram utilizados <math>p_0 = 0, 0</math>, <math>[-0, 5 &lt; x_0 &lt; 0, 5]</math> e <math>k = 2, 5</math>.</i>	78
3.21	<i>Comparativo entre a posição final das trajetórias do mapa padrão em, função dos parâmetros <math>\gamma</math> e <math>x_0</math> (figura inferior), com parte do retrato de fases (figura superior) do mapa padrão conservativo. As condições iniciais estão representadas pela linha vermelha (figura superior) que compreende <math>p_0 = 0, 0</math> e <math>\{-0, 5 &lt; x_0 &lt; 0, 5\}</math>. A figura foi construída com <math>k = 2, 5</math>.</i>	79
3.22	<i>Ampliação de uma pequena região delimitada pela região em destaque da Figura 3.21, do comparativo entre a posição final das trajetórias do mapa padrão dissipativo, em função dos parâmetros <math>\gamma</math> e <math>x_0</math> (figura inferior), com o retrato de fases (figura superior) do mapa padrão conservativo.</i>	80
3.23	<i>Ampliação da região em destaque posicionada à esquerda da Figura 3.22 inferior.</i>	81
3.24	<i>Ampliação da região em destaque posicionada à direita da Figura 3.22 inferior.</i>	81
3.25	<i>Ampliação da região em destaque da Figura 3.1.</i>	82
3.26	<i>Ampliação da região em destaque da Figura 3.25.</i>	82
3.27	<i>Transição da órbita de período <math>7 \times 4</math> para <math>1 \times 4</math>.</i>	83
3.28	<i>Transição da órbita de período <math>23 \times 4</math> para <math>7 \times 4</math> e, em seguida, para <math>1 \times 4</math>.</i>	84



3.29	<i>Ampliação do retrato de fases do mapa padrão para a ilha de período 4 em destaque na Figura 3.1 com duas regiões diferentes de condições iniciais com dissipação <math>\gamma = 10^{-3}</math>. Foram dadas <math>10^3</math> condições iniciais escolhidas em regiões não-hiperbólicas, em amarelo (superior) e, <math>10^3</math> condições iniciais nas regiões hiperbólicas, em azul (inferior).</i>	86
3.30	<i>Tempo <math>\times</math> posição para duas condições iniciais cuja dissipação é dada por <math>\gamma = 10^{-3}</math>. Em preto, <math>10^3</math> trajetórias com condições iniciais não-hiperbólicas e, em vermelho, <math>10^3</math> com condições iniciais hiperbólicas.</i>	87
4.1	<i>Ilustração de uma molécula de acetado de <math>Mn_{12}</math>, protótipo representativo da família de uma Molécula Nanomagnética Simples (MNS) [31].</i>	89
4.2	<i>Retrato de fases para uma rede de spins. Os parâmetros para esta figura foram <math>\beta = 0,05</math>, <math>\epsilon = 0,005</math>. Para esta figura, <math>50 \times 50</math> condições iniciais de <math>(S_n; \theta_n)</math> com <math>10^3</math> iteradas.</i>	91
4.3	<i>Retrato de fases para uma rede de spins. Os parâmetros para esta figura foram <math>\beta = 0,3</math>, <math>\epsilon = 0,15</math>. Para esta figura, <math>50 \times 50</math> condições iniciais de <math>(S_n; \theta_n)</math> com <math>10^3</math> iteradas.</i>	91
4.4	<i><math>\lambda</math> em função do parâmetro <math>\beta</math> e das condições iniciais <math>0 &lt; \theta &lt; 2\pi</math>. A linhas em preto são os centro das regiões regulares (vermelho).</i>	92
4.5	<i>Retrato de fases do mapa da rede de spins para duas dissipações diferentes. Na Figura (a), <math>\gamma = 10^{-4}</math>, enquanto que na Figura (b), <math>\gamma = 10^{-1}</math>.</i>	94
4.6	<i>Expoente de Lyapunov calculado em função dos parâmetros <math>\beta</math> e <math>\gamma</math>. Para este espaço de parâmetros, <math>\epsilon = 0,15</math> condição inicial dada no ponto <math>(x_0; p_0) = (0, 2; 0, 3)</math>.</i>	94
4.7	<i>Expoente de Lyapunov calculado em função dos parâmetros <math>\epsilon</math> e <math>\gamma</math>. Para este espaço de parâmetros, <math>\beta = 0,30</math> e condição inicial dada no ponto <math>(x_0; p_0) = (0, 2; 0, 3)</math>.</i>	95

# Capítulo 1

## Introdução

Esta tese é um trabalho que tem por objetivo estudar os efeitos causados pela inclusão de um termo de dissipação em sistemas dinâmicos não lineares. Este primeiro capítulo traz um breve contexto histórico sobre pesquisas realizadas na área de dinâmica, algumas técnicas que podem ser utilizadas para caracterizar um sistema físico e comentários sobre o que será feito ao longo da tese.

Nos tempos atuais, os modelos matemáticos utilizados para descrever fenômenos da natureza são, em sua grande maioria, não lineares. Porém, historicamente, os modelos utilizados até meados do século XVIII eram os lineares pois, além de serem melhor compreendidos pelo fato de permitirem soluções analíticas, descreviam apropriadamente os fenômenos de interesse da época.

Os trabalhos com sistemas não lineares começaram a tornar-se relevantes no final do século XVIII e início do XIX com *Henri Poincaré* que mostrou a existência de um movimento irregular ao relatar sensibilidade às condições iniciais. O objetivo era tentar ganhar um prêmio de um concurso proposto na época pelo rei Oscar I, da Suécia, sobre a prova matemática da estabilidade, ou não, do sistema solar. Poincaré desenvolveu um trabalho sobre o problema de três corpos, intitulado como “*Sur le problème des trois corps et les équations de dynamique*”, publicado em *Acta Mathematica*, e que coloca Poincaré como precursor nos estudos sobre *caos* [1].

Por meados dos anos 80, com o desenvolvimento e a popularização dos computadores, simulações numéricas permitiram investigar detalhadamente a dinâmica de sistemas não lineares através da integração numérica de equações diferenciais, ou mesmo iteração em sistemas dinâmicos cujo tempo é uma variável discreta. Um número enorme de condições iniciais pode ser usado de forma a simular experimentos realísticos.

Trabalhos importantes neste contexto foram desenvolvidos por volta de 1977-1979 por Chirikov *et al.* [2, 3], ao tratar um pêndulo não-linear como uma relação de recorrência, o que permitia que a descrição do problema fosse feita de forma mais simples. Relações de recorrência para as quantidades físicas de interesse podem ser obtidas pela discretização temporal das equações de movimento. Esta técnica é muito utilizada para resolver problemas através das seguidas auto-realimentações das equações conhecidas como *mapas* [4].

Um dos mapas mais conhecidos na literatura é o chamado mapa de *Taylor-Chirikov* ou mapa *padrão* [2, 3, 4], dado pela relação:

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + k \sin(\theta_n) & \text{mod } 2\pi, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + p_{n+1} & \text{mod } 2\pi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Um sistema físico real que serve de base para construção do mapa padrão é o pêndulo sujeito à ação de pulsos gravitacionais periódicos (Figura 1.1(a)). Outro é o *rotor pulsado*, representado por uma haste rígida que gira com velocidade angular  $\omega = \dot{\theta}$  sujeita a ação de pulsos periódicos  $F(t)$  (Figura 1.1(b)). Em ambos os casos, para relacionar os sistemas físicos com o mapa padrão, os pulsos devem ser aplicados periodicamente em tempos bem específicos  $t = n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , e sua intensidade é representada pelo valor de  $k$ . O momento é representado por  $p_n$ , a posição por  $\theta_n$  e  $n$  indica a coordenada temporal discreta.

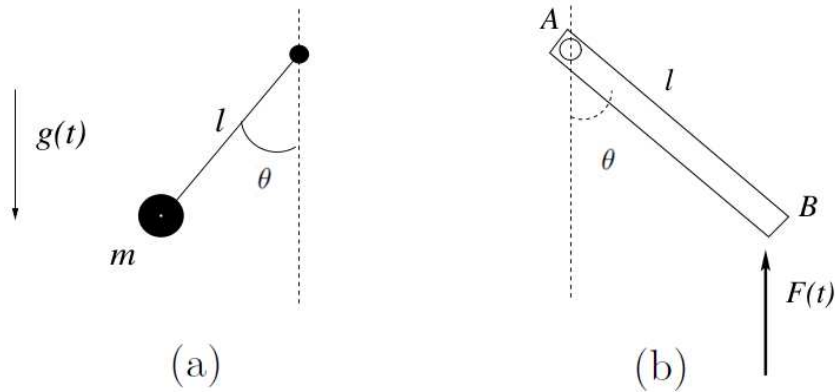


Figura 1.1: (a) Pêndulo sujeito a ação de um pulso gravitacional periódico. (b) Rotor pulsado. Sistemas físicos descritos pelo mapa padrão.

Como vantagens em descrever um sistema físico através do uso de mapas no lugar de integração numérica, pode-se citar a redução do custo computacional e a precisão numérica. O mapa da Equação (1.1) gera um espaço de fases (representação das variáveis dinâmicas) com a presença de estados regulares (linhas aparentemente contínuas/pontilhadas) e caóticos (região do espaço preenchida aleatoriamente), como exemplificado na Figura 1.2. As regiões regulares são formadas por curvas invariantes, conhecidas como curvas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [4], enquanto que as regiões caóticas são formadas por trajetórias que apresentam comportamento intermitente e podem gastar muito tempo nas bordas das regiões regulares. Estas bordas são conhecidas como *stickiness* (termo em inglês que significa grude) [4, 5].

O mapa padrão serve como modelo para descrever localmente a dinâmica de sistemas realísticos, que tem como característica a coexistência entre estados regulares e caóticos. Como exemplo de um mapa que representa uma situação real, tem-se o modelo proposto por Fermi [4], em 1949, que tenta explicar a aceleração de raios cósmicos. De acordo com Fermi, raios cósmicos são originados e acelerados primeiramente no espaço interestelar de galáxias por colisões de partículas carregadas em movimentos contra campos magnéticos [6]. O mapa é resultado de uma idealização do movimento unidimensional de uma bola movendo-se entre duas paredes, uma fixa e outra com oscilação senoidal [4]. Outro caso é dado pela dinâmica de partículas em aceleradores circulares. O mapa para este caso reproduz um fenômeno de troca de sinais do momento observado experimentalmente conforme o movimento se torna cada vez mais relativístico. Seu estudo foi realizado em 1984 por Howard e Hohs [4]. Esses mapas apresentam coexistência de estados regulares e caóticos da mesma forma que o mapa padrão. Por essa razão, ao se estudar o mapa padrão, também estuda-se as propriedades de sistemas realísticos.

Nesta tese, além de estudar sistemas dinâmicos com o uso de mapas, o foco principal é analisar a transição entre mapas conservativos e dissipativos. O interesse em sistemas dissipativos existe nas áreas de física e engenharia, por entender que modelos teóricos com pequenas dissipações são utilizados na descrição da natureza, nos projetos científicos e nos projetos comerciais que, por visarem lucro, o interesse é justamente a perda mínima de energia. Exemplos típicos em que a dissipação é considerada são: estudos de redes elétricas, em que parte da energia elétrica é dissipada nas linhas de transmissão gerando aquecimento dos mesmos; sistemas viscosos, em que o atrito é responsável pela perda de energia; sistemas termodinâmicos, no qual a segunda lei da

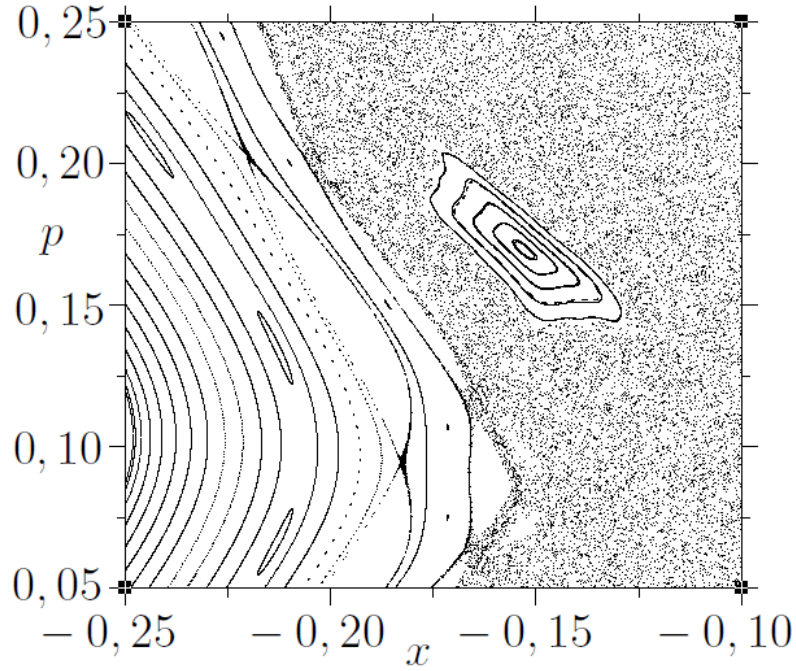


Figura 1.2: *Ampliação do espaço de fases do mapa padrão com parâmetro  $k = 1, 3$ . As curvas contínuas/pontilhadas representam os estados regulares enquanto que as regiões preenchidas aleatoriamente representam os estados caóticos. Para construção desta figura, foram dadas  $10^4$  iteradas com transiente nulo em cada uma das 200 condições iniciais realizadas ao longo da linha  $p_0 = 0,0$  e  $-0,5 < x_0 < 0,5$ .*

termodinâmica postula que uma forma de dissipação leva ao aumento da entropia [4, 7] e sistemas mecânicos, como a construção de motores em que a redução dos atritos entre as peças os levam a melhores desempenhos. Devido a esta diversidade de aplicações, estudaremos quais são os efeitos da dissipação em sistemas dinâmicos em geral, com o uso do mapa padrão. Quando a dissipação é considerada, as regiões regulares do espaço de fases (Figura 1.2) tornam-se instáveis e suas estruturas dão lugar a atratores, que podem ser *fixos*, quando as trajetórias que formam essas regiões são atraídas para atratores pontuais, *periódicos*, quando as trajetórias oscilam entre diferentes atratores, e *caóticos*, quando as trajetórias são atraídas de forma a ficarem sobre um atrator caótico no espaço de fases [4, 8, 9, 10, 11]. Atratores caóticos são conhecidos por terem dimensões fractais [4]. Para caracterizar/distinguir todos os tipos de dinâmicas observadas nos sistemas, é necessário usar alguma ferramenta. O espectro de Lyapunov, que mede a média das taxas da divergência ou convergência entre órbitas próximas no

espaço de fases, é uma destas ferramentas e serve para diagnosticar se uma dinâmica é caótica ou não. Nesta tese ele será utilizado para diferenciar as regiões regulares das caóticas em função do parâmetro de não-linearidade do mapa padrão [12, 13, 14].

Pode-se citar algumas pesquisas cujo foco é a transição conservativo-dissipativo em diferentes sistemas dinâmicos [15, 16, 17, 18]. O mecanismo de geração e aniquilação de atratores durante a transição de um sistema Hamiltoniano para um sistema dissipativo foi estudado numericamente com o uso do mapa padrão a partir da observação dos Torus KAM do mapa [19]. Outro problema, com base na aceleração e aquecimento/resfriamento de partículas carregadas num campo elétrico, o mapa padrão foi modificado com a inclusão de um termo relativístico, e uma força redutora entre dois pulsos consecutivos, o que o transforma num mapa relativístico. Com a inclusão da dissipação, este modelo ficou conhecido como *mapa padrão relativístico dissipativo* [20]. Este trabalho mostra as drásticas modificações no espaço de fases nas regiões em torno dos pontos fixos devido a dissipação.

Quando um sistema dissipativo se aproxima do limite Hamiltoniano (conservativo), há um aumento no número de atratores periódicos e nas mudanças das bacias de atração [21, 23, 24]. O modelo conhecido como *mapa rotor simples* [21] diferencia-se do mapa padrão por apresentar um pulso da forma  $\sin(\theta_n + p_n)$ . O trabalho com o uso deste mapa mostra que o número de atratores segue uma lei de potências e que, para sistemas fracamente dissipativos, os atratores de diferentes períodos coexistem no espaço de fases de forma que os efeitos dos atratores de altos períodos tornam-se importantes. Neste contexto, esta tese tentará detalhar como são formados esses atratores e, como as trajetórias se comportam conforme a dissipação é inserida e gradativamente aumentada. A dissipação no mapa padrão faz com que ocorra o aparecimento de estruturas fractais (auto-similares) na forma de camarões, no espaço de parâmetros, devido a presença de atratores periódicos em meio a regiões caóticas [9, 25, 26].

Egydio *et al.* [27] mostram que, para um sistema dissipativo, a criação de atratores associada com a dinâmica caótica no regime conservativo, ambos em regiões apropriadas do espaço de fases, constituem um mecanismo genérico de aumento da média de energia, o que faz com que a energia média de uma partícula dissipativa adquira valores mais elevados do que sua energia média nos casos conservativos.

No contexto de caos, há um crescente interesse, não somente nos expoentes de Lyapunov, mas também nos seus correspondentes vetores. A motivação está no fato desses vetores contribuírem para relacionar as regiões no espaço de fases ligadas a movi-

mentos mais/menos estáveis [28]. Nesta tese, os vetores covariantes de Lyapunov serão utilizados para tentar explicar como as trajetórias dissipativas buscam seus atratores nos espaços de fases.

O embasamento teórico para os trabalhos realizados nesta tese é apresentado no Capítulo 2, que traz conceitos sobre sistemas Hamiltonianos e definições relacionadas a mapas. Neste capítulo são discutidos conceitos de estabilidades em mapas unidimensionais e bidimensionais e discussões sobre o mapa padrão conservativo e dissipativo. Discussões sobre, expoente de Lyapunov a tempos finitos, reortonormalização de Gram-Schmidt, teorema KAM, grude (*stickiness*), variedades e hiperbolicidades, também aparecem neste capítulo.

Com o uso do mapa padrão, o Capítulo 3 apresenta os resultados de como ocorre a transição conservativo-dissipativo de um sistema dinâmico, com a aplicação das ferramentas discutidas no capítulo 2. Neste capítulo são apresentados os principais resultados desta tese.

O Capítulo 4 apresenta os estudos de um sistema dinâmico totalmente diferente dos mapas convencionais. É um modelo de uma rede de spins baseado em uma Molécula Nanomagnética Simples. O comportamento dos spins ao longo da rede pode ser descrito por um mapa não linear de maneira que os sítios dos spins são interpretados como a coordenada temporal discreta durante a evolução do mapa [29, 30, 31]. Neste capítulo são reproduzidos alguns dos espaços de fases conhecidos na literatura para este mapa e são apresentados os resultados devido a inclusão de um termo de dissipação no mesmo.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões desta tese.

# Capítulo 2

## Introdução Teórica

Este capítulo traz uma fundamentação teórica para realização dos trabalhos apresentados nesta tese. O capítulo inicia-se com os estudos referentes à Sistemas Dinâmicos e Sistemas Hamiltonianos, bem como a descrição de sistemas integráveis e quase integráveis. Em sequência, uma breve discussão sobre Mapas e Seções de Poincaré, com análise de estabilidade de mapas unidimensionais e bidimensionais exemplificados com uso do mapa padrão conservativo e dissipativo. O Expoente de Lyapunov a Tempos Finitos é descrito com a utilização da técnica de reortonormalização de Gram-Schmidt. A seguir, a descrição de uma trajetória no Espaço de Fases é feita neste capítulo a partir do entendimento do Teorema KAM, Teorema de Poincaré-Birkhoff e Variedades. Este capítulo teórico é finalizado com uma breve descrição sobre o efeito *Stickiness* e as hiperbolicidades.

### 2.1 Sistemas Dinâmicos

Em Física-Matemática, sistemas dinâmicos referem-se a construção de modelos capazes de evoluir no tempo de maneira que os estados presentes estejam, de forma bem definida, ligados a estados anteriores. Os sistemas dinâmicos podem ser classificados pela: (a) *variável temporal* ( $t$ ), a qual pode ser contínua ou discreta, (b) *linearidade*, linear ou não linear e (c) dependência temporal, que pode ser *autônoma* quando não depende explicitamente do tempo e, *não autônoma* quando depende explicitamente do tempo [4, 32].

As soluções dos sistemas contínuos são para os casos em que a variável  $t$  é contínua e são conhecidas como *fluxos*. Um sistema  $N$ -dimensional contínuo pode ser definido



por meio de  $N$  Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que, vetorialmente, podem ser representadas por [4, 33]:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)]. \quad (2.1)$$

O sistema formado por equações de diferenças, ou *mapas*, são utilizados para os casos em que a variável  $t$  é discreta e suas soluções são conhecidas como *órbitalas*. Para estes casos, o tempo é representado por números inteiros. Para um sistema  $N$ -dimensional, as  $N$  equações de diferenças podem ser escritas vetorialmente na forma [4, 33]:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{M}(\vec{x}_n), \quad (2.2)$$

em que o estado inicial é representado por  $n = 0$  e os estados seguintes,  $n = 1, 2, \dots$  são obtidos por iterações consecutivas do mapa. Ou seja,  $x_1^{(1)} = M(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(N)})$ ,  $x_2^{(1)} = M(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(N)})$  e assim por diante. O índice inferior representa a coordenada temporal conforme ocorrem as iterações do mapa e o índice superior representa a dimensão. A trajetória (órbita) é formada a partir das soluções  $x$  que são obtidas com um número suficiente de iterações do mapa [33].

Para EDOs *não-autônomas*, pode-se transformá-las em *autônomas* por meio da inserção de uma dimensão a mais no sistema [34], a qual pode ser exemplificada com a equação que descreve o oscilador harmônico amortecido forçado

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (2.3)$$

Ao substituir  $z = t$ ,  $\dot{z} = 1$  e  $y = \dot{x}$ , tem-se 3 EDOs de primeira ordem *autônomas* e acopladas [34]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega z) - \gamma y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Uma vez que na maioria dos casos é difícil obter soluções analíticas, é possível fazer um estudo *qualitativo* das EDOs a fim de buscar características importantes

de suas soluções a partir de simulações numéricas sem que seja necessário resolvê-las explicitamente.

## 2.2 Sistemas Hamiltonianos

Seja um sistema *Hamiltoniano* com  $N$  graus de liberdade representado pela função *Hamiltoniana*  $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ . Os estados deste sistema serão representados pelos vetores coordenadas  $\vec{q} \in \mathbb{R}^N$  e momentos  $\vec{p} \in \mathbb{R}^N$  generalizados.

A partir de  $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  obtém-se as equações de movimento, ou equações de Hamilton [4, 35]

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.5)$$

Quando essas Equações (2.5) são integradas, obtém-se a trajetória  $\vec{q}(t)$  e  $\vec{p}(t)$  do sistema em uma região denominada *espaço de fases* cuja dimensão é  $2N$ . Uma característica importante em Sistemas Hamiltonianos é a conservação do volume do espaço de fases [4, 32]. Esta afirmação é garantida pelo teorema de *Liouville* que diz que, se o espaço de fases expandir em alguma direção durante a evolução temporal do sistema, há contração em outra direção e, apesar da alteração do formato, o volume permanece constante [4, 36] (Figura 2.1).

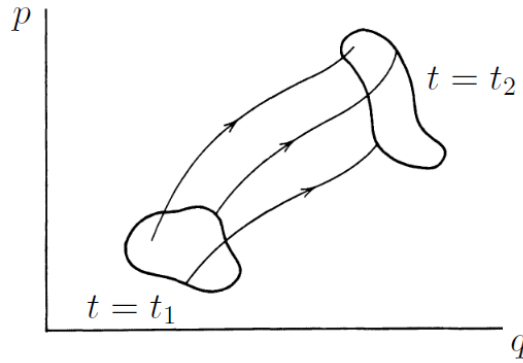


Figura 2.1: Trajetória no espaço de fases partindo de um estado  $(p, q)$  no tempo  $t_1$  para o estado  $(p, q)$  num tempo  $t_2$  [4].

### 2.2.1 Sistemas Integráveis

Uma Hamiltoniana  $2N$ -dimensional é considerada *integrável* se as equações de Hamilton puderem ser separáveis em  $2N$  equações independentes e, com isto, possuírem  $N$  constantes de movimento independentes  $f(q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  as quais obedecem a propriedade  $\partial H / \partial p_i = f(q_i)$  isoladamente [4].

Se forem calculadas as derivadas de  $f(\vec{p}, \vec{q})$  em função do tempo para uma Hamiltoniana que não depende explicitamente do tempo,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt}, \quad (2.6)$$

e substituir as Equações de Hamilton descritas em (2.5), tem-se:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = [f, H]. \quad (2.7)$$

Se  $f$  é uma constante de movimento para cada dimensão, ou seja, cada grau de liberdade, então os *colchetes de Poisson* de  $f$  com  $H$  (último termo da Equação 2.7) devem ser nulos. Uma vez que as constantes de movimento devem ser independentes para que o sistema seja *integrável*, então  $[f_i, f_j] = 0$  para todo  $i$  e  $j$  [4].

Considere como exemplo um pêndulo simples (*pêndulo Hamiltoniano*) de haste rígida com comprimento  $l$ , massa  $m$  e o ângulo entre a haste e a linha vertical dada por  $q$ . O pêndulo é posto a oscilar e está sujeito somente à ação da gravidade  $g$ . Uma vez que a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela é a própria energia mecânica do sistema, ou seja

$$E = H(p, q) = \frac{p^2}{2ml^2} - mg \cos(q). \quad (2.8)$$

As equações de movimento são calculadas diretamente a partir das Equações (2.5) como segue:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -mg \sin(q), \\ \dot{q} &= \frac{p}{ml^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Uma solução completa para as variáveis canônicas  $p$  e  $q$  em função do tempo pode ser obtida a partir da integração de uma das Equações de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p} \quad \Rightarrow \quad t = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\partial H / \partial p}. \quad (2.10)$$

Ao substituir a Hamiltoniana descrita em (2.8) na Equação (2.10), o problema se reduz a um problema conhecido como *quadratura* cuja integral é uma integral elíptica [4, 36, 44]. No entanto, informações consideráveis podem ser obtidas a partir da análise da Hamiltoniana (2.8) para diferentes valores da energia  $E$ . Lembre-se que o valor da Hamiltoniana independente do tempo corresponde a soma da energia cinética com a energia potencial, então, se  $E$  for maior que o máximo valor da energia potencial, a massa do pêndulo nunca ficará parada de maneira que  $p$  sempre será diferente de zero resultando num movimento ilimitado de rotação em  $q$ . A curva “ $E_1$ ” da Figura 2.2 exemplifica o retrato de fases  $(p, q)$  para este nível de energia.

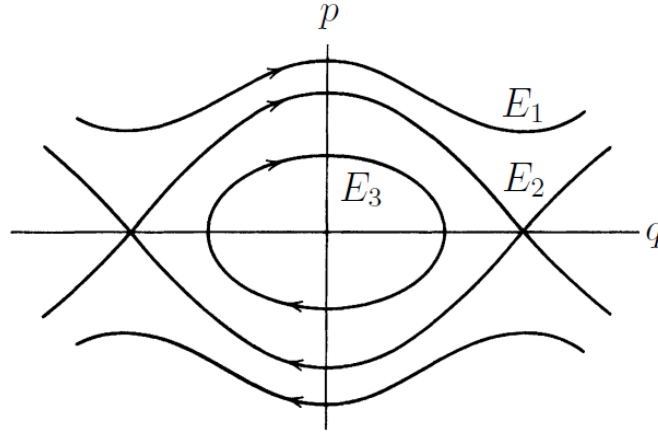


Figura 2.2: Ilustração do retrato de fases do pêndulo Hamiltoniano para 3 energias diferentes, maior ( $E_1$ ), menor ( $E_3$ ) e igual ( $E_2$ ) a máxima energia potencial [4]. Um pêndulo com energia  $E_1$  executa um movimento de rotação, com  $E_3$ , um movimento de oscilação e, com  $E_2$ , executa um movimento intermediário entre a rotação e oscilação.

Se  $E$  for menor que o máximo valor da energia potencial, o movimento será oscilatório e haverá um retorno periódico sempre que a energia potencial atingir o valor da energia total, ou seja, quando  $p$  for nulo [4]. Na Figura 2.2, um exemplo do que aparece no espaço de fases para este nível de energia é representado pela curva “ $E_3$ ”.

E por fim, uma consideração especial para o caso em que  $E$  for igual a máxima energia potencial. O espaço de fases para este nível de energia está exemplificado pela curva “ $E_2$ ” da Figura 2.2. O movimento ocorre na *separatriz* entre a rotação e a oscilação o que torna o período longo ( $\sim \infty$ ). Para este caso, tem-se dois pontos de singularidade quando  $p = 0$ : a origem, quando  $q = 0$  o ponto é estável, conhecido como ponto singular *elíptico* e, a junção dos dois ramos da *separatriz* em  $q = \pm\pi$  onde o ponto é instável, conhecido como ponto de singularidade *hiperbólica* (pontos de aparente encontro entre duas trajetórias “ $E_2$ ”). Quanto ao movimento de trajetórias no espaço de fases nas proximidades destes pontos de singularidade, tem-se que as trajetórias tendem a aproximarem-se dos pontos *elípticos* enquanto que nas proximidades dos pontos *hiperbólicos* tendem a se afastarem-se [4]. Esta discussão será retomada adiante.

### 2.2.2 Sistemas quase Integráveis

Será feito agora uma descrição qualitativa de um sistema Hamiltoniano integrável sujeito a uma perturbação que dá a ele um caráter mais genérico. Estes sistemas são ditos não integráveis ou quase integráveis. Uma característica de um sistema com  $N < 3$ , quase integrável, é a presença simultânea de trajetórias regulares e regiões estocásticas (aleatórias/caóticas) de maneira que trajetórias regulares são capazes de separar as regiões estocásticas.

Um sistema quase integrável autônomo com dois graus de liberdade sujeito a uma perturbação  $\epsilon$  pode ser escrito da forma

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \quad (2.11)$$

em que  $\vec{J}$  e  $\vec{\theta}$  são as variáveis ação-ângulo de um movimento não perturbado e  $\epsilon$  uma perturbação pequena.  $H_0$  é a Hamiltoniana não perturbada e está em função somente da ação enquanto que  $H_1$  é uma função periódica de  $\theta$  e representa um termo adicional na Hamiltoniana existente devido a perturbação. De acordo com o teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [4], uma fração finita das trajetórias do espaço de fases são regulares e as demais exibem estocasticidade ou comportamento caótico. Apesar das discussões sobre teorema KAM e movimento no espaço de fases serem melhor discutidas adiante, é interessante adiantar que, uma trajetória regular no espaço de fases percorre um caminho sobre um toro (Figura 2.3) e cada ponto da trajetória representa um estado  $(\vec{J}, \vec{\theta})$ .  $\vec{J}$  são coordenadas radiais e  $\vec{\theta}$  as angulares [4, 32].

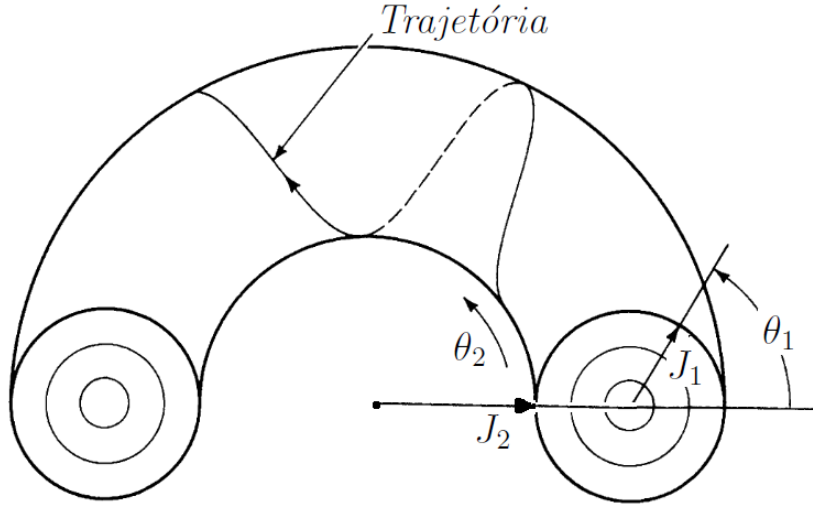


Figura 2.3: *Trajetória no espaço de fases. Os círculos indicam o movimento em uma seção (de Poincaré) formada com  $\theta_2$  fixo [4].*

A presença de trajetórias regulares não implica na existência de uma integral isolada (invariante global) ou nenhuma simetria do sistema. No entanto, quando elas existem, representam invariância local de movimento. Essas trajetórias podem ser periódicas condicionadas a alguma variável angular, que cobre densamente uma superfície toroidal composta por uma ação  $J_i$  constante com a qual a variável angular gira em torno de duas direções da superfície com frequências genéricas independentes entre si formando um torus. Alternativamente, essas trajetórias podem ser formadas por curvas periódicas fechadas circundando em torno de um torus com um número inteiro de voltas. Trajetórias regulares são mais convenientemente estudadas pelo uso da teoria de perturbação e são tidas como uma seção dentro da superfície total do espaço de fases [4].

*Trajetórias Regulares:* Vários tipos de trajetórias regulares e suas interseptações com a superfície formada por  $\theta_2 = \text{constante}$  estão mostradas na Figura 2.4. A Figura 2.4(a) ilustra uma trajetória genérica que cobre toda a superfície de um torus. O movimento no eixo  $J_2$  é periódico em  $\theta_2$  com período  $2\pi$ . Cada vez que a trajetória cruza a superfície, obtém-se uma posição  $\theta_1$ . O movimento de  $\theta_1 = \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \dots$  forma uma curva fechada e invariante.

O exemplo mostrado na Figura 2.4(b) é um caso de ressonância e obedece a equação

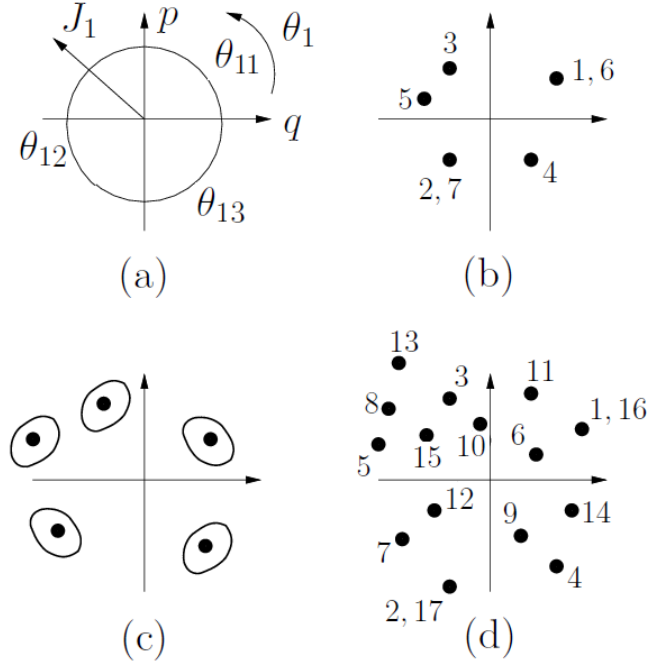


Figura 2.4: *Ilustração de uma trajetória regular no espaço de fases cruzando com uma seção (superfície) definida para  $\theta_2 = \text{constante}$ . A Figura (a) ilustra uma trajetória genérica que cobre toda superfície de um torus. A Figura (b) ilustra uma trajetória fechada que cruza pontos periódicos primários no espaço de fases. A Figura (c) ilustra uma trajetória nas vizinhanças dos pontos ressonantes primários que gera uma região ressonante de ordem secundária. A Figura (d) ilustra uma trajetória que cruza pontos ressonantes de ordem secundária no espaço de fases.*

$$r\omega_2(\vec{J}) + l\omega_1(\vec{J}) = 0, \quad (2.12)$$

em que  $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ ,  $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ ,  $r$  e  $l$  são inteiros. A trajetória ressonante é periódica em  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A Figura 2.4(b) mostra um caso específico  $r = 5$  e  $l = 2$ . As sucessivas interseções da trajetória com a superfície formam cinco pontos discretos (representadas pelos números que aparecem na figura) chamados de *pontos periódicos* do movimento ao mesmo tempo que a trajetória percorre duas “voltas” sobre a superfície. Se a trajetória periódica (fechada) for formada pelo Hamiltoniano não perturbado  $H_0$ , o movimento é conhecido como *ressonância primária*. Esta ressonância representa um caso especial em que o número de rotação  $r/l$  é racional [4].

A Figura 2.4(c) mostra uma superfície formada por uma trajetória genérica nas vizinhanças de uma ressonância primária. As sucessivas interseções da trajetória com a superfície implica num grupo de cinco curvas contínuas, suaves e fechadas, chamadas de *ilhas primárias* que se formam em volta dos pontos fixos mostrados no caso da Figura 2.4(b). E por fim, a Figura 2.4(d) mostra um exemplo de movimento mais complexo. Neste caso, a trajetória contínua e fechada passa 3 (três) vezes em torno de cada ressonância primária percorrendo um caminho que cruza a superfície 15 vezes. Este é um exemplo do aparecimento de *ressonâncias secundárias* que são produzidas pelo termo Hamiltoniano perturbado,  $H_1$ , e estão, por sua vez, circundados por *ilhas secundárias* [4].

*Trajetoórias Caóticas:* As regiões formadas por trajetórias caóticas são conhecidas por preencher uma porção de volume finito do espaço de fases. As sucessivas interseções de uma trajetória caótica simples com a superfície da seção preenche uma área finita. Dois exemplos estão mostrados na Figura 2.5.

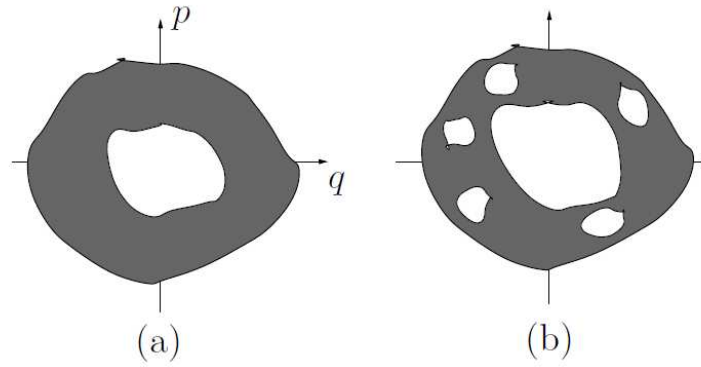


Figura 2.5: *Ilustração do cruzamento entre uma trajetória caótica no espaço de fases com uma seção (superfície) definida para  $\theta_2 = \text{constante}$ . A Figura (a) ilustra uma região caótica entre duas curvas invariantes enquanto que a Figura (b) ilustra uma região caótica próxima de ilhas regulares.*

A Figura 2.5(a) mostra uma região caótica preenchida por uma trajetória simples situada entre duas curvas invariantes (curvas em que as trajetórias inicialmente pertencentes a elas, sempre permanecerão nelas, enquanto que, outras trajetórias são impedidas de cruz -las) como as mostradas na Figura 2.4(a). O fato de ser uma região caótica não exclui a existência de trajetórias per dicas nesta região mas, as trajetórias próximas a essas órbitas per dicas, ou não se movem sobre uma ilha estável em torno



de um ponto fixo, ou as ilhas são tão pequenas a ponto de não serem visíveis. A Figura 2.5(b) mostra um caso em que a região caótica é preenchida por uma trajetória simples próxima de ilhas como a ilha mostrada na Figura 2.4(c) [4].

Quando movimentos caóticos surgem próximos de separatrizes, acabam por separar as curvas invariantes de suas ilhas. As regiões caóticas que se formam próximas das separatrizes são conhecidas como *camada ressonante*. Para pequenas perturbações  $\epsilon$ , com dois graus de liberdade, as camadas caóticas são finas e separadas por curvas invariantes. Estas camadas são isoladas umas das outras de forma que o movimento de uma para outra é proibido uma vez que as trajetórias não conseguem cruzar as curvas invariantes para  $N < 3$ . Conforme aumenta-se a perturbação  $\epsilon$ , estas camadas ressonantes são fortemente perturbadas até serem destruídas. As camadas estocásticas misturam-se quando a última curva invariante que separa as camadas é destruída. A mistura das ressonâncias primárias leva ao aparecimento de um movimento *caótico global* ou *fortemente caótico* [4, 32].

## 2.3 Mapas e Seções de Poincaré

Como um exemplo geral, imagine uma equação da forma

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t), \quad (2.13)$$

com  $f(t)$  uma função dependente explicitamente do tempo. Esta equação apresenta um espaço de fases e cada ponto deste espaço é definido por  $(x, \dot{x}, t)$ . Para um sistema físico representado pela equação acima, pode-se dizer que cada estado é representado por cada ponto do espaço de fases. Definindo um plano fixo no espaço de fases, como visto na Figura 2.6, a *seção de Poincaré* é obtida na intersecção da trajetória com o plano  $(x, \dot{x})$ .

Quando a trajetória corta o espaço de fases no mesmo estado  $(x, \dot{x})$  repetidamente, a trajetória é fechada e a órbita é dita periódica. O período é dado pelo número de vezes que a trajetória cruzou o espaço de fases antes de atingir um estado repetidamente e, uma solução de período  $\tau$  tem a forma  $\vec{x}(t) = \vec{x}(t + \tau)$ . Se o corte no espaço de fases for em pontos diferentes e o estado nunca se repetir para um tempo consideravelmente longo, a trajetória é aberta e a órbita é dita não-periódica ou aperiódica [32, 34].

Pode-se ver uma ilustração na Figura 2.6.

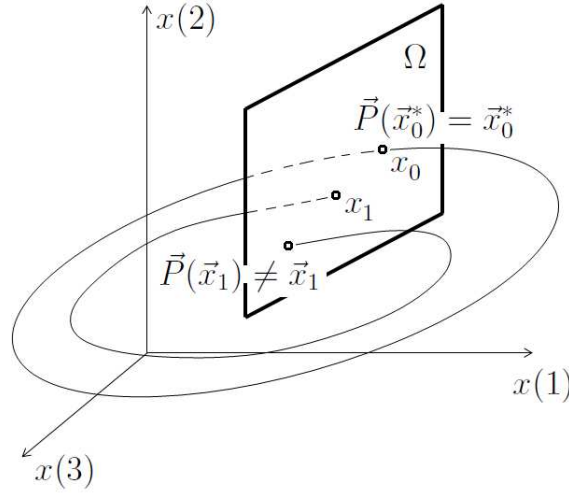


Figura 2.6: Corte no espaço tridimensional,  $\Omega$ , exemplificando uma seção de Poincaré. Na figura, a trajetória  $\vec{x}_0$  é periódica quando  $\vec{P}(\vec{x}_0^*) = \vec{x}_0^*$ , indicando que o ponto  $\vec{x}_0^*$  é um ponto fixo. Quando  $\vec{P}(\vec{x}_1) \neq \vec{x}_1$ , a trajetória  $\vec{x}_1$  é não-periódica.

Mapas representam um grupo de sistemas dinâmicos cuja coordenada temporal evolui de forma *discreta* de maneira que suas soluções aparecem sob a forma de uma *relação de recorrência*. Como forma geral, um mapa pode ser escrito como

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n), \quad (2.14)$$

em que  $n$  pode ser considerado como o índice temporal discreto e o resultado em  $x_{n+1}$  é reutilizado em  $x_n$  para a próxima iteração. Um ponto  $x^*$  é considerado um ponto fixo se  $x^* = F(x^*)$ . Como exemplos de mapas utilizados na literatura, pode-se citar, dentre vários, o *mapa padrão* e *mapa de Henón*, como exemplos de mapas bidimensionais (2D) e o *mapa logístico*, como exemplo de mapa unidimensional (1D) [4, 32, 34]. Este último aparece sob a forma  $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$  e que, conforme for o valor do parâmetro de controle,  $\mu$ , o comportamento deste sistema pode ser caótico ou não e, para alguns casos, serve como modelo de evolução de populações biológicas [34].

### 2.3.1 Estabilidades em Mapas Unidimensionais

Pode-se relacionar algumas características da dinâmica de um mapa com as estabilidades das trajetórias formadas pelo mesmo. Considere, como exemplo, uma bola de gude colocada no centro do interior de uma bacia esférica. Ao pequeno toque em qualquer direção, a bola voltaria para o centro da bacia indicando que o ponto central da mesma é *estável*. O mesmo não aconteceria se a mesma bacia esférica fosse posicionada para baixo e a bola colocada sobre a mesma (na parte de fora). Neste caso, ao pequeno toque na bola, ela rolaria para fora da bacia indicando que o ponto inicial de partida da bola é *instável*. Uma analogia deste exemplo com mapas consiste em associar o tempo, durante o movimento da bola de gude, às sucessivas iterações do mapa.

Pode-se estudar estabilidade com a análise da evolução de um mapa unidimensional, com a dinâmica iniciada em dois pontos próximos, ou seja,  $x_n$  próximo do ponto fixo  $x^*$ . Isto representa um pequeno empurrão na bola de gude do exemplo citado acima. Esta evolução, que é feita através de sucessivas iterações, deve ser capaz de fornecer informações ao dizer se o ponto fixo é *estável*, *assintoticamente estável* ou *instável*. Se, a partir de  $x_n$ , a dinâmica seguir em direção ao ponto fixo, diz-se que este ponto é *assintoticamente estável* de tal forma que, em algum instante futuro, a trajetória vai convergir ao ponto fixo. Porém, se a trajetória se afastar do ponto fixo, então este ponto é considerado *instável*.

Um pequeno afastamento do ponto fixo pode ser representado por  $\epsilon_n$ . Com isto, o valor da posição  $x_n$  próxima do ponto fixo pode ser escrita como  $x_n = x^* + \epsilon_n$ . Para um mapa unidimensional

$$x_{n+1} = F(x_n) = F(x^* + \epsilon_n) \simeq x^* + \epsilon_{n+1}. \quad (2.15)$$

A estabilidade pode ser analisada comparando os valores de  $\epsilon_n$  e  $\epsilon_{n+1}$ . Se  $\epsilon_{n+1} > \epsilon_n$ , a dinâmica se afasta do ponto fixo  $x^*$ . Caso contrário, a dinâmica se aproxima de  $x^*$ . Ao considerar uma expansão em série de Taylor em torno de  $x^*$ , obtém-se

$$x_{n+1} = F(x^*) + \frac{dF(x^*)}{dx} \epsilon_n + \frac{1}{2} \frac{d^2 F(x^*)}{dx^2} \epsilon_n^2 + \dots \quad (2.16)$$

Ao considerar que no ponto fixo  $F(x^*) = x^*$  e ao comparar as Equações (2.15) e (2.16), verifica-se que para expansão até primeira ordem na Equação (2.16) que

$$\epsilon_{n+1} = C\epsilon_n, \quad (2.17)$$

em que a constante  $C$  que aparece na equação acima é dado por  $dF(x^*)/dx = C$ . Para o caso em que  $-1 < C < +1$ , tem-se um exemplo de *estabilidade assintótica* devido ao fato de que  $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$  faz com que a distância entre  $x_n$  e  $x^*$  diminua ao longo das sucessivas iteradas do mapa. Caso o valor de  $C$  esteja dentro do intervalo mencionado com valores positivos, ou seja,  $0 < C < 1$ , a distância diminui monotonicamente (com variação constante) o que indica, como citado anteriormente, *estabilidade assintótica* (Figura 2.7(a)). Porém, para valores negativos de  $C$ ,  $-1 < C < 0$ , a distância diminui de forma oscilante em torno do ponto fixo devido a mudança sucessiva de sinal. Este tipo de convergência recebe o nome de *flip*, como está representado na Figura 2.7(b).

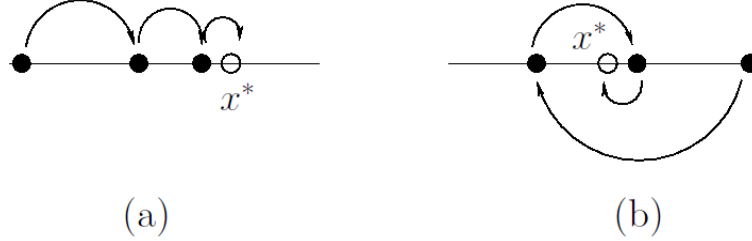


Figura 2.7: *Convergência de duas trajetórias para um ponto fixo  $x^*$  de duas maneiras diferentes. Na Figura (a), a convergência é monotônica enquanto que na Figura (b), alternada (“flip”).*

Para o caso em que  $|C| > 1$ , a trajetória iniciada em  $x_n$  se afasta do ponto fixo a cada iteração o que leva este ponto fixo ser *instável*. Porém, a forma com que a trajetória se afasta do ponto fixo depende do sinal de  $C$ . Para  $C > 1$ , se afasta monotonicamente, enquanto que para  $C < -1$ , o afastamento é alternado.

Quando  $|C| = 1$ , deve-se fazer uma investigação na linearidade do mapa. Para o caso do mapa linear, ou seja,  $d^j F(x^*)/dx^j = 0$  quando  $j \geq 2$ ,  $x^*$  é considerado como um *centro* e a trajetória estabiliza a uma distância constante do ponto fixo. Caso o mapa não seja linear, deve-se analisar os termos de ordem superior da expansão de Taylor mostrada na Equação (2.16) para que seja possível a análise da estabilidade.

Um mapa também pode apresentar periodicidade das trajetórias. Isto ocorre quando, após uma sequência de  $\tau$  iteradas, o valor de  $x$  se repete de forma que  $x_{n+\tau} =$

$x_n$ . Neste caso, dizemos que a trajetória possui uma órbita com período  $\tau$ . Por exemplo, para uma órbita de período 2, o valor de  $x$  se repete após 2 iterações, ou seja, para um mapa unidimensional da forma  $x_{n+1} = F(x_n)$ , tem-se  $x_{n+2} = F(F(x_n)) = x_n$ .

### 2.3.2 Estabilidades em Mapas Bidimensionais

Um caso genérico de um mapa bidimensional pode ser representado por

$$\begin{cases} x_{n+1} &= F(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= G(x_n, y_n). \end{cases} \quad (2.18)$$

O ponto fixo deve ser definido por duas coordenadas e será representado por  $P^* = (x^*, y^*)$ . Lembre-se que no caso bidimensional as regras de estabilidade devem ser obedecidas nas duas dimensões, ou seja,  $x^* = F(x^*, y^*)$  e  $y^* = G(x^*, y^*)$ .

Considere um ponto muito próximo do ponto fixo, dado por  $(x_n = x^* + \epsilon_n, y_n = y^* + \eta_n)$ , em que  $\epsilon_n$  e  $\eta_n$  são as distâncias infinitesimais em relação ao ponto  $(x^*, y^*)$  para as duas coordenadas. Pode-se escrever uma série de Taylor em torno deste ponto fixo como

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1} &= \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_n + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} \eta_n + o(2), \\ \eta_{n+1} &= \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_n + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial y} \eta_n + o(2). \end{cases} \quad (2.19)$$

Ao considerar apenas os termos de primeira ordem, a expansão fica da forma

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1} &= a\epsilon_n + b\eta_n, \\ \eta_{n+1} &= c\epsilon_n + d\eta_n. \end{cases} \quad (2.20)$$

Observe na expansão mostrada na Equação (2.20) que a matriz dos coeficientes é exatamente a matriz Jacobiana do mapa avaliada no ponto fixo ( $J^*$ ), ou seja,

$$J^* = \begin{pmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A Equação (2.20) pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_n \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

ou então, na forma vetorial:

$$\vec{\epsilon}_{n+1} = J^* \vec{\epsilon}_n. \quad (2.21)$$

No caso 1D, a estabilidade está diretamente ligada à derivada do mapa no ponto. Para o caso 2D, faz-se a mesma consideração, porém, para este caso, a estabilidade do ponto fixo depende dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da Jacobiana no ponto fixo ( $J^*$ ). Uma vez que estes autovalores podem ser reais ou complexos, a análise de estabilidade fica um pouco mais complicada que o caso unidimensional.

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem Reais, de acordo com [34], deverá existir uma transformação na Equação (2.21) tal que

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \lambda_1 u_n, \\ v_{n+1} &= \lambda_2 v_n, \end{cases} \quad (2.22)$$

o que permite que a estabilidade deste mapa bidimensional seja analisada a partir de dois mapas unidimensionais. Neste caso, a análise segue da seguinte forma:

- Se  $-1 < \lambda_{1,2} < +1$ , a trajetória iniciada próximo de um ponto fixo se aproxima do mesmo e o sistema é *assintoticamente estável*. Neste caso, o ponto fixo é considerado como um *atrator*.
- Se  $\lambda_{1,2} > |1|$ , a trajetória se afasta do ponto fixo e o sistema é *instável*, sendo considerado um *repulsor*.
- Se  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| > 1$ , ou vice-versa, a trajetória se move em relação ao ponto fixo sob um ponto de sela hiperbólico, ou seja, aproxima-se por um eixo e se afasta por outro. Neste caso, o ponto fixo é considerado *instável*.

A partir do que está descrito acima a respeito da estabilidade depender dos autovalores da matriz Jacobiana no ponto fixo, pode-se considerar, em mapas bidimensionais, critérios de estabilidade em termos de um *círculo de raio unitário* no plano complexo dos autovalores. Desta maneira, pode-se dizer que o limite da estabilidade se encontra no raio unitário. Ou seja:

- Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  estiverem internos ao raio unitário, o sistema é *assintoticamente estável*.
- Quando  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  estiver fora do raio unitário, o sistema é considerado *instável*.

Quando os autovalores forem reais, tem-se um caso particular do critério de estabilidade pois o círculo de raio unitário pode ser atravessado somente pelo eixo real, nos pontos  $\pm 1$ . Nisto, se  $|\lambda_1|$  (ou  $\lambda_2$ ) for igual a 1 enquanto que  $|\lambda_2|$  (ou  $\lambda_1$ ) for menor que 1, o estado é conhecido como estado de *divergência incipiente* (ou início da divergência). Para o caso em que um dos autovalores for igual a  $-1$  e o valor absoluto do outro for menor que 1, o estado é conhecido como *flip incipiente*.

Diz-se *incipiente* o estado em que a aproximação não é suficiente para estabelecer a estabilidade (ou instabilidade) e deve, neste caso, observar o comportamento dos termos de ordem superior na expansão da série de Taylor mostrada na Equação (2.19).

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem números complexos, de tal forma que  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , deve-se utilizar outra transformação de coordenadas que, de acordo com [34], pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Relembre alguns conceitos sobre números complexos. Um número da forma  $z_n = u_n + iv_n$  pode ser escrito na forma polar,  $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ , onde  $r_n$  é o módulo do número complexo e  $\theta_n$  é o ângulo que o módulo faz com o eixo real do plano cartesiano real-imaginário. Ao referir-se a mapas, que evolui no tempo após iteradas sucessivas e, ao lembrar que o índice  $n$  indica o tempo em alguma iterada qualquer, escreve-se o número complexo em uma iterada posterior como

$$z_{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1} = r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}}. \quad (2.23)$$

Pode-se fazer o mesmo com a Equação 2.22 ao escrevê-la em uma iterada genérica seguinte a  $n$ ,

$$z_{n+1} = \lambda_1 z_n, \quad (2.24)$$

em que  $\lambda_1$  também pode ser escrito na forma polar,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta = |\lambda_1| e^{i\theta_1}$ . Como  $\theta_1$  é o ângulo que o módulo do autovalor faz com o eixo real do número complexo, então,

$\theta_1 = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$ . Aplicando o uso da relação de *Pitágoras*, é possível chegar na relação  $|\lambda_1| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ .

Ao unir todas as informações descritas acima juntamente com as Equações (2.23) e (2.24), pode-se reescrever  $z_{n+1}$  como segue:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \lambda_1 z_n, \\ z_{n+1} &= [|\lambda_1| e^{i \tan^{-1}(\beta/\alpha)}] z_n, \\ z_{n+1} &= [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} e^{i \tan^{-1}(\beta/\alpha)}] z_n, \\ z_{n+1} &= [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} e^{i \tan^{-1}(\beta/\alpha)}] r_n e^{i \theta_n}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ao separar o termo radial ( $r_n$ ) do termo angular ( $\theta_n$ ), verifica-se, a partir das Equações (2.23) e (2.25), que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} r_n, \\ \theta_{n+1} &= [\theta_n + \tan^{-1}(\beta/\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A partir do termo radial da Equação (2.26), verifica-se que o módulo do autovalor  $\lambda_1$  determina se  $r_{n+1}$  é maior ou menor que  $r_n$  e, a partir de então, verifica-se a convergência, divergência ou constância da trajetória em relação ao ponto fixo.

Se  $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ , há convergência da trajetória para o ponto fixo que, neste caso, obtém-se em forma de um *espiral estável*, ou foco.

Caso contrário, se  $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ , tem-se uma fonte (*source*) e o ponto fixo é considerado *instável*. Outra informação que se pode obter dos autovalores é que o quociente  $\alpha/\beta$  determina o ângulo de rotação em cada iterada.

A terceira possibilidade é quando  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ . Da mesma forma que foi citado para o caso 1D, deve-se saber se o mapa em questão é ou não linear. Para mapa linear, o ponto fixo  $(x^*, y^*)$  é considerado um *centro* e a partir daí analisamos o que acontece com  $\theta$ . Se o ângulo  $\theta = \tan^{-1}(\beta/\alpha) = n2\pi$ , ou seja, múltiplo de  $2\pi$  de tal maneira que  $\theta/2\pi$  seja um número racional, todo ponto contido no plano de uma seção de Poincaré será um ponto periódico e a órbita (periódica) é representada por uma trajetória fechada. Porém, no caso de  $\theta/2\pi$  ser um número Irracional, então as sucessivas iteradas do mapa formarão um círculo na seção de Poincaré em torno do ponto fixo  $(x^*, y^*)$  e representará uma órbita Irracional dada por uma trajetória



aberta. Para o caso do mapa não linear, deve-se observar as características do mapa considerando os termos de ordem superior na expansão de Taylor mostrada na Equação (2.19).

Para o caso de autovalores reais, a estabilidade a partir da consideração do raio unitário afirmava que o *círculo de raio unitário* só poderia ser cruzado nos pontos  $\pm 1$  do eixo real, ou seja, quando  $\theta = 0, \pi$ . Porém, para o caso dos autovalores complexos conjugados, o raio unitário pode ser cruzado em qualquer região do círculo unitário num ponto diferente de  $0, \pi$ . Quando isto ocorre, produz uma instabilidade conhecida como bifurcação de *Neimark-Sacker* (mapas), ou bifurcação de *Hopf* (fluxos) para mapas [32, 34].

### 2.3.3 Mapa Padrão

O mapa padrão foi introduzido por Taylor e analisado extensivamente por Chirikov em 1979. Conhecido como mapa de *Chirikov-Taylor* ou mapa *padrão* [2, 4], este serve de modelo para descrever um pêndulo de massa  $m$ , comprimento do fio  $l$ , posicionado a um ângulo  $\theta$  da vertical e que recebe a ação de pequenos pulsos periódicos (*kicks*) por um campo gravitacional homogêneo  $g(t)$ . Uma representação do modelo aparece na Figura 1.1.

O modelo é descrito pela seguinte função Hamiltoniana [2]:

$$H(\theta, p_\theta, t) = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 + ml^2 \omega_0^2 \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - n), \quad (2.27)$$

em que  $\theta$  é a posição angular, calculada em módulo  $2\pi$ ,  $p$  é o momento e  $\omega_0^2 = g/l$  a frequência natural do pêndulo.  $\delta$  é a função delta de Dirac garantindo que o pulso é aplicado periodicamente quando  $t = n$ .

A virtude deste sistema ser Hamiltoniano é que suas equações de movimento, clássicas e quânticas, podem ser reduzidas a um mapa que pode ser iterado numericamente e, sob circunstâncias adequadas, o movimento deste sistema pode ser caótico [2].

As equações de movimento da Hamiltoniana descrita na Equação (2.27) podem ser calculadas a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta &= \frac{-\partial H}{\partial \theta} = ml^2\omega_0^2 \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t-n), \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

A cada vez que  $t = n$ , ocorre um pulso. Então, ao integrar as Equações (2.28) entre dois pulsos consecutivos,  $n$  e  $n+1$ , obtém-se, primeiramente para o momentum,  $p$ , que:

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} dp_\theta &= \int_n^{n+1} ml^2\omega_0^2 \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t-n) dt, \\ p_{\theta_{n+1}} &= p_{\theta_n} + ml^2\omega_0^2 \sin(\theta_n) T,\end{aligned}\tag{2.29}$$

em que  $T$  é o tempo entre dois pulsos consecutivos e  $\sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t-n) = \sin(\theta_n)$  para o mesmo intervalo de tempo. Para que a posição  $\theta$  seja integrada, deve-se primeiramente definir a função  $p_\theta(t)$ , ou seja:

$$p_\theta(t) = p_{\theta_n} + ml^2\omega_0^2 T \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t-n).\tag{2.30}$$

Com a substituição da Equação (2.30) na Equação (2.28) para posição  $\theta$ , obtém-se ao integrá-la, que

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} d\theta &= \int_n^{n+1} \frac{p_\theta(t)}{ml^2} dt, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \int_n^{n+1} \frac{1}{ml^2} \{p_{\theta_n} + ml^2\omega_0^2 T \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t-n)\} dt, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{ml^2} \{p_{\theta_n} T + ml^2\omega_0^2 T \sin(\theta_n) T\}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{T}{ml^2} P_{\theta_{n+1}}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Ao redefinir o momento  $p_n = p_{\theta_n} T / (ml^2)$  e representar a intensidade do pulso por  $k = (\omega_0 T)^2$  [2], o mapa formado a partir das Equações (2.29) e (2.31), pode ser escrito como

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + k \sin(\theta_n) \quad \text{mod } 2\pi, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + p_{n+1} \quad \text{mod } 2\pi. \end{cases} \quad (2.32)$$

em que o  $\text{mod } 2\pi$  é usado na literatura para que as soluções fiquem dentro de uma janela de lado  $2\pi$  no espaço de fases.

### 2.3.4 Mapa Padrão Conservativo

Apesar das aplicações de um sistema conservativo em fenômenos da natureza serem limitadas, sistemas como este são muito estudados em várias áreas da Física pois, além de serem capazes de resolver problemas reais, abrem caminho para o estudo de sistemas dissipativos. Aplicações como Mecânica Celeste, Física de Plasma e Aceleradores de partículas são alguns dos casos que podem ser aproximados como conservativo sem descaracterizá-los [20].

O mapa padrão é um modelo de mapa conservativo utilizado no estudo da transição do movimento regular para o caótico. A matriz Jacobiana ( $J$ ) do mapa padrão descrito na Equação (2.32) é escrita como

$$J = \begin{pmatrix} \partial p_{n+1}/\partial p_n & \partial p_{n+1}/\partial \theta_n \\ \partial \theta_{n+1}/\partial p_n & \partial \theta_{n+1}/\partial \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \cos(\theta_n) \\ 1 & 1 + k \cos(\theta_n) \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Calcula-se o determinante da matriz  $J$  e verifica-se que  $\det(J) = 1$ , o que indica ser um caso de sistema conservativo [4]. A partir da equação  $\det(J - I\lambda) = 0$ ,  $I$ =matriz Identidade, calcula-se os autovalores para análise da estabilidade dos pontos fixos.

Os pontos fixos do momento  $p$  e posição angular  $\theta$  devem ser invariantes no tempo, ou seja,  $(p_{n+1}, \theta_{n+1}) = (p_n, \theta_n)$ . Utilizando-se das equações descritas em (2.32), têm-se para o momento

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n, \\ p_n &= p_n + k \sin(\theta_n), \\ 0 &= \sin(\theta_n), \end{aligned} \quad (2.34)$$

ou seja,  $\theta_n = n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Para a posição angular

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \theta_n, \\
\theta_n &= \theta_n + p_{n+1}, \\
\theta_n &= \theta_n + p_n + k \operatorname{sen}(\theta_n), \\
0 &= p_n + k \operatorname{sen}(\theta_n),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

ou seja,  $\operatorname{sen}(\theta_n) = -p_n/k$ . Como o momentum é calculado em módulo  $2\pi$ , deve obedecer a condição  $p_n = m2\pi$ , com  $m$  inteiro. Para cada  $m$ , os valores de  $\theta$  são 0 e  $\pi$ . Então, quando  $m = 1$ , a matriz Jacobiana pode ser calculada para ambos os casos

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \pm k \\ 1 & 1 \pm k \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

em que os diferentes sinais,  $\pm k$ , aparecem devido aos possíveis valores de  $\theta$ . Se  $\theta = 0$ , aparece  $+k$  enquanto que, se  $\theta = \pi$ , aparece  $-k$ . Nesta mesma matriz, o determinante indica um caso conservativo pois  $\det(J) = 1$  e, as condições de equilíbrio devem satisfazer uma condição sobre o traço da matriz Jacobiana em que  $|\operatorname{Tr}[J]| < 2$  [4]. A demonstração desta condição de estabilidade será feita adiante com a demonstração da Equação (2.43), que inclui o termo de dissipação. Então, o ponto fixo para o mapa padrão conservativo será estável se

$$|2 \pm k| < 2. \tag{2.37}$$

Como  $k$  é um valor real positivo, o ponto fixo  $(p_1 = 2\pi, \theta_1 = 0)$  será *instável* devido a condição apresentada na Equação (2.37) não ser satisfeita para todo  $k$ . Para  $\theta = \pi$ , a condição de estabilidade exige que  $k$  seja menor que 4, ou seja, o ponto fixo  $(p_1 = 2\pi, \theta_1 = \pi)$  é estável para  $k < 4$  e instável para  $k > 4$ .

Pode-se fazer alguns testes de estabilidade fazendo uso das condições de estabilidade discutidas na Subseção 2.3.2.

- $\theta = 0$  e  $k = 2$ .

Este valor de  $\theta$  garante que o ponto fixo é *instável* para todo  $k$ . Ao escolher, sem critério específico,  $k = 2$ , obtém-se os autovalores  $\lambda_1 = 3,732$  e  $\lambda_2 = 0,268$ .

Como  $|\lambda_1| > 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ , indica uma condição de instabilidade do tipo *ponto de sela hiperbólico*, caso que um dos dois autovalores sai do chamado *raio unitário* de estabilidade.

- $\theta = \pi$  e  $k = 3$ .

O valor de  $k = 3$  é escolhido pois a condição de estabilidade para  $\theta = \pi$  é manter  $k < 4$ . Para este caso, os autovalores são  $\lambda_{1,2} = -5,0 \pm 0,866i$  com valor absoluto dos autovalores igual a unidade. Quando isto acontece, calcula-se  $\tan^{-1}(\text{Im}(\lambda_1)/\text{Re}(\lambda_1)) = -1,0472$ . Como esta razão é irracional, a figura formada na seção de Poincaré, devido as sucessivas iterações do mapa, descreverá um círculo contínuo em torno do ponto fixo.

- $\theta = \pi$  e  $k = 5$ .

Para este caso, tem-se  $\lambda_1 = -0,382$  e  $\lambda_2 = -2,6180$ . Um dos autovalores possui módulo maior que a unidade e outro menor. O ponto fixo é *instável* e é considerado um *ponto de sela hiperbólico*.

### 2.3.5 Mapa Padrão Dissipativo

Sistemas dissipativos tem conquistado espaço nos estudos de dinâmica por serem capazes de solucionar problemas de forma complementar aos casos conservativos. Até mesmo em alguns problemas importantes na literatura, como o caso de Física de Plasma e Aceleradores, sabe-se que sempre existirá, nos casos realísticos, algum pequeno tipo de dissipação, como é o caso, por exemplo, de colisões entre as partículas [20].

Diferente de sistemas Hamiltonianos, nos quais o volume do espaço de fases mantém-se constante, um sistema dissipativo é caracterizado por uma contínua contração de seu volume conforme evolui o tempo, o que garante a redução da energia total do sistema [4].

O modelo utilizado nos trabalhos de Rodrigues *et al.* [21] e Wenzel *et al.* [37] introduz o termo  $(1 - \gamma)$  no mapa padrão conservativo de forma a diminuir a energia a medida que o sistema evolui.

$$\begin{cases} p_{n+1} &= (1 - \gamma)p_n + k \sin(\theta_n) \quad \text{mod } 2\pi, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + p_{n+1} \quad \text{mod } 2\pi. \end{cases} \quad (2.38)$$

O determinante da matriz Jacobiana é igual a  $(1-\gamma)$ . Para sistemas conservativos, o determinante deve ser igual a unidade, ou seja, quando  $\gamma = 0$ , volta a ser conservativo.

A redução do volume do espaço de fases permite formar estruturas para onde as trajetórias são atraídas. Essas estruturas são caracterizadas por terem dimensão fractal e são usualmente chamadas de *atratores caóticos*. Um atrator é dito caótico quando duas órbitas próximas divergem exponencialmente com movimentos caóticos [4]. Os pontos ressonantes se tornam atratores de maneira que as órbitas quase periódicas que circundam estes pontos, tendem a ser atraídas por eles. Um atrator pode se tornar *instável* e as trajetórias que se direcionam a ele passam a ser atraídas por outros novos atratores e origina-se o fenômeno de *bifurcação* [4].

Pode-se calcular a condição de estabilidade para o mapa padrão dissipativo a partir da sua matriz Jacobiana,

$$J_{dissip} = \begin{pmatrix} \partial p_{n+1}/\partial p_n & \partial p_{n+1}/\partial \theta_n \\ \partial \theta_{n+1}/\partial p_n & \partial \theta_{n+1}/\partial \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma & k \cos(\theta_n) \\ 1-\gamma & 1+k \cos(\theta_n) \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

verifica-se que o traço é dado por:  $Tr[J] = 2 - \gamma + k \cos(\theta)$ . Os auto-valores podem ser calculados com  $det[J - I\lambda] = 0$ ,  $I$  é a matriz identidade, então:

$$\begin{aligned} det[J - I\lambda] &= \begin{vmatrix} 1-\gamma-\lambda & k \cos(\theta_n) \\ 1-\gamma & 1+k \cos(\theta_n)-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ \lambda^2 + (\gamma - k \cos(\theta_n) - 2)\lambda + (1-\gamma) &= 0, \\ \lambda^2 - Tr[J]\lambda + (1-\gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Os auto valores da Equação (2.40) são apresentados na relação

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}\{Tr[J] \pm \sqrt{Tr[J]^2 - 4(1-\gamma)}\}, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}\{Tr[J] \pm i\sqrt{4(1-\gamma) - Tr[J]^2}\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Os auto valores mostrados na Equação (2.41) possuem as relações:  $\lambda_1 \lambda_2 = (1-\gamma)$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr[J]$ . A condição de estabilidade para os auto-valores complexos é de que devem estar dentro do raio unitário complexo, ou seja:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= e^{\pm i\sigma} = \cos(\sigma) \pm i \sin(\sigma), \\
\lambda_1 + \lambda_2 &= 2 \cos(\sigma), \\
Tr[J] &= 2 \cos(\sigma).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Para as soluções estarem dentro do raio unitário, deve-se estabelecer que:  $|\cos(\sigma)| < 1$ . Então, a condição de estabilidade para o mapa padrão dissipativo é dada por:

$$\begin{aligned}
|Tr[J]| &< 2, \\
|2 - \gamma + k \cos(\theta_n)| &< 2.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

## 2.4 Expoente de Lyapunov a Tempos Finitos

Em um sistema dissipativo, uma trajetória iniciada em algum ponto qualquer  $(x_0, p_0)$ , pode ser atraída de diferentes maneiras no espaço de fases para regiões definidas como *atratores*. Quando uma região formada por várias condições iniciais  $\{(x_0^1, p_0^1), (x_0^2, p_0^2), \dots, (x_0^N, p_0^N)\}$  é atraída pelo mesmo *atrator*, diz-se que esta é a sua *bacia de atração*.

A principal característica do *caos* presente em sistemas não-lineares é a sensibilidade às condições iniciais, ou seja, apesar de duas condições iniciais muito próximas poderem ser atraídas ao mesmo atrator, isto não é garantido. Quando duas trajetórias iniciadas próximas são atraídas para diferentes atratores, pode-se ter um caso de atratores *caóticos*.

Por volta de 1968, com a finalidade de caracterizar caoticidade nas trajetórias, Oselec fez uso da teoria sobre Expoente de Lyapunov [4]. A conexão entre o expoente de Lyapunov e a divergência exponencial entre trajetórias foi dada em 1976 por Benettin *et al.* e em 1977 por Pesin, que estabeleceram uma conexão com a entropia de Kolmogorov [4]. Um procedimento capaz de calcular computacionalmente o Expoente de Lyapunov foi desenvolvido por volta de 1980 por Benettin *et al* [4].

O matemático russo Alexander M. Lyapunov desenvolveu um método de medida do afastamento entre duas trajetórias iniciadas em pontos próximos [34]. Um exemplo

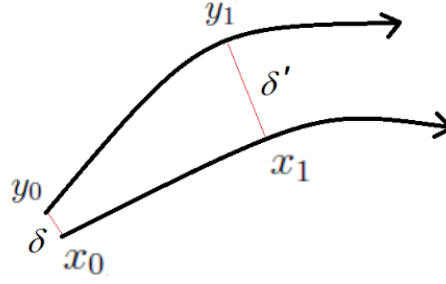


Figura 2.8: *Ilustração da divergência entre duas trajetórias iniciadas próximas. Uma trajetória percorre a distância compreendida entre os pontos  $x_0$  e  $x_1$  e outra trajetória entre os pontos  $y_0$  e  $y_1$ . As trajetórias afastam-se/aproximam-se de uma distância  $\delta$  para  $\delta'$ .*

dos cálculos de Lyapunov pode ser dado com o uso de um mapa 1D, da forma mostrada na Equação (2.14), para duas trajetórias iniciadas em dois pontos próximos,  $x_0$  e  $y_0$ , cuja distância entre estes pontos é definida por

$$\delta = y_0 - x_0. \quad (2.44)$$

A cada iterada, a trajetória do mapa posiciona-se em uma nova coordenada. Ou seja, para a condição inicial  $x_0$ , as posições seguintes podem ser definidas por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Quando o mapa é iniciado em  $y_0$ , as posições seguintes em cada iterada podem ser representadas por  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (Figura 2.8). Então, pode-se definir a distância entre as trajetórias após uma iterada como

$$\delta' = y_1 - x_1. \quad (2.45)$$

A medição exponencial da expansão da distância  $\delta$  até a distância  $\delta'$  pode ser definida por

$$\delta' = e^L \delta, \quad (2.46)$$

em que  $L$  é a taxa que indica a intensidade da expansão entre as trajetórias. Com o uso das Equações (2.44) e (2.45), a diferença entre as distâncias após uma iterada pode ser escrita em termos do próprio mapa descrito na Equação (2.14)



$$\begin{aligned}\delta' &= F(y_0) - F(x_0), \\ \delta' &= F(x_0 + \delta) - F(x_0).\end{aligned}\tag{2.47}$$

Assim, ao unir a Equação (2.46) com o módulo da Equação (2.47), tem-se o resultado de uma divergência após uma iterada que, após generalizar em  $n$  iteradas do mapa, pode-se escrever uma equação da forma

$$|F^n(x_0 + \delta) - F^n(x_0)| = |\delta|e^{nL},\tag{2.48}$$

em que a notação usada é  $F^n(x) = F(F...F(x)...)$ , ou seja, o mapa  $F(x)$  foi iterado  $n$  vezes. Ao reescrever a Equação 2.48,

$$L = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^n(x_0 + \delta) - F^n(x_0)}{\delta} \right|.\tag{2.49}$$

Se for considerado um grande número de iterações de forma que  $n \rightarrow \infty$  e uma distância inicial infinitesimal  $\delta \rightarrow 0$ , então pode-se dizer que:

$$\lambda(x_0) = L(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} \right|,\tag{2.50}$$

em que  $\lambda$  é o *expoente de Lyapunov*. Esta grandeza representa uma medida de divergência ( $\lambda > 0$ ) ou convergência ( $\lambda < 0$ ) exponencial.

O método descrito pela Equação (2.50) não deve ser aplicado nos casos com dimensão  $N \geq 2$ , como é o caso do mapa padrão. Para isto, outros métodos devem ser utilizados, como o método citado na próxima Seção. Para o caso do mapa padrão dissipativo, descrito pelas Equações (2.38),  $(\theta; p)$  são as variáveis de estados que representam a trajetória e  $k$  o parâmetro de controle. O mapa evolui sob a forma de auto-realimentação, ou seja, dada uma condição inicial  $(\theta_0; p_0)$ , obtém-se como resultado  $(\theta_1; p_1)$ , que representa o passo seguinte da evolução do mapa. Os valores  $(\theta_1; p_1)$  são reutilizados para obtenção de  $(\theta_2; p_2)$  e assim por diante. Como observa-se na Figura 2.9, o número de soluções que a trajetória pode obter depende do parâmetro  $k$  que, para alguns valores, só se permite uma única solução. Estas são trajetórias de único

período, ou período 1. Quando  $k$  ultrapassa certo valor (aproximadamente 5,57), a solução que era única para cada  $k$  se torna instável e ocorre um processo de bifurcação, que duplica o período de convergência das trajetórias. Neste caso, tem-se trajetórias de período 2. Conforme aumenta-se o valor de  $k$ , outras bifurcações (duplicação de período) acontecem até que o mapa se encontre no regime caótico, no qual se torna impossível prever o número de soluções. Na região em que  $k \approx 5,68$  ocorre, aparentemente, o efeito conhecido como *multi-estabilidade*, que é quando um sistema dinâmico apresenta dois ou mais estados estacionários de maneira a ter diferentes atratores para o mesmo conjunto de parâmetros de controle [38].

A Figura 2.9 mostra o diagrama de bifurcação do mapa padrão com o respectivo cálculo do expoente de Lyapunov. Nesta figura, o expoente de Lyapunov se torna nulo nos pontos de bifurcação, negativo nas regiões periódicas e positivo nas regiões caóticas. A linha vermelha na figura inferior é a linha nula.

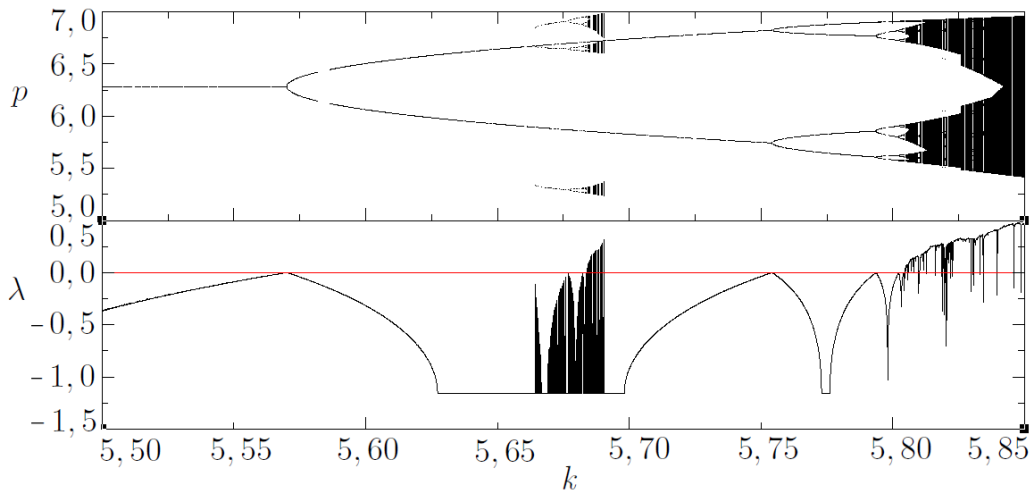


Figura 2.9: Diagrama de bifurcação do mapa padrão dissipativo com o cálculo do expoente de Lyapunov. Na parte superior da figura está o diagrama de bifurcação do mapa padrão com parâmetro de dissipação  $\gamma = 0,8$ , enquanto que na parte inferior está o respectivo valor do expoente de Lyapunov para os mesmos valores do parâmetro de controle “ $k$ ”. Em vermelho, na figura inferior, a linha nula. Para esta figura, foram dadas  $10^3$  condições iniciais na linha  $5,5 \leq k \leq 5,85$ , com  $10^5$  iteradas com transiente de  $8 \times 10^4$ , ou seja, foram considerados somente os últimos  $2 \times 10^4$  pontos.

Para mapas com mais de uma dimensão, a taxa de separação de trajetória pode

ser diferente para cada dimensão. A quantidade de expoentes de Lyapunov depende da dimensão do mapa em questão. Para um mapa com  $N$  dimensões, o expoente de Lyapunov é calculado a partir da sua matriz Jacobiana  $N$ -dimensional. De forma geral, [34]

$$[\lambda(x_1), \lambda(x_2), \dots, \lambda(x_n)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln | \text{autovalores de } \prod_{i=0}^{N-1} J(\vec{x}_i) |, \quad (2.51)$$

em que  $J(\vec{x}_i)$  é a matriz Jacobiana do mapa calculada em  $\vec{x}_i$ .

### 2.4.1 Reortonormalização de Gram-Schmidt

A partir do trabalho de Bennetin, em 1980, sobre a criação de ferramentas para calcular o expoente de Lyapunov, com o título “*Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems*” e, Shimada e Nagashima, em 1979, com o trabalho “*A numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems*”, Wolf *et al.* [12] implementarem uma técnica computacional capaz de obter o expoente de Lyapunov em uma série temporal através de um processo de Reortonormalização de Gram-Schmidt (RGS).

A RGS é um método de ortonormalização de vetores que consiste em, a partir de um conjunto de vetores  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  linearmente independentes, retornam um conjunto de vetores ortonormais  $S' = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  capazes de gerar o mesmo subespaço formado pelo conjunto de vetores  $S$ .

A projeção de um vetor  $\vec{v}$  em um eixo ortogonal que contém o vetor  $\vec{z}$  se dá na forma

$$Proj_{\vec{z}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{z} \rangle}{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle} \vec{z}. \quad (2.52)$$

A notação  $\langle \vec{v}, \vec{z} \rangle$  indica o produto escalar entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{z}$ . Dada uma base de vetores  $S$ , o processo de RGS cria uma base de vetores em  $S'$  ortogonais. O primeiro vetor não é alterado e a base ortonormal é criada a partir deste primeiro vetor. Sendo assim, todos os outros vetores são projetados nos eixos ortogonais ao primeiro. Para o caso bidimensional, calcula-se a base ortogonal seguindo os passos descritos na Equação (2.53) e ilustrado na Figura 2.10 [12, 39]

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 &= \vec{v}_1, \\ \vec{z}_2 &= \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{z}_1} \vec{v}_2.\end{aligned}\tag{2.53}$$

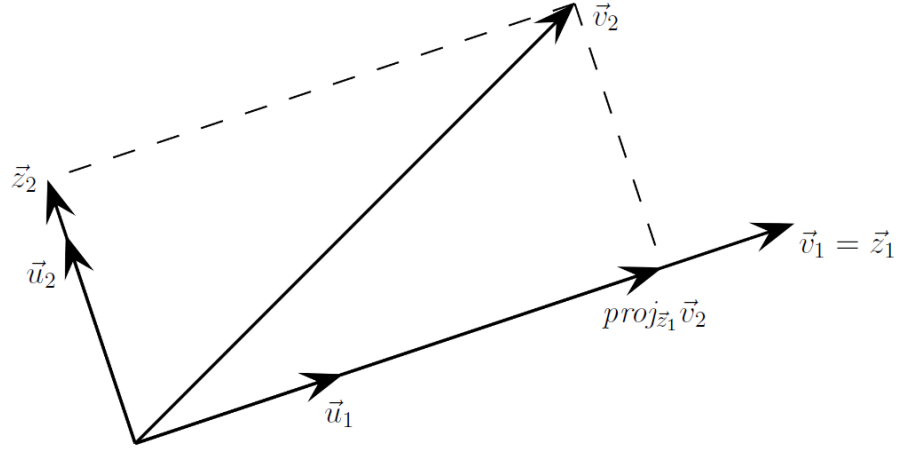


Figura 2.10: *Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para um caso 2D.*

A base ortonormal é calculada pela normalização dos vetores ortogonais  $\vec{u}_i = \vec{z}_i/|\vec{z}_i|$ . Como exemplo, considere um caso bidimensional com um conjunto de vetores  $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  dado por:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.\tag{2.54}$$

A partir destes, podemos criar uma base ortogonal de forma a obter o conjunto de vetores  $S_2 = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ .

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 &= \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{z}_2 &= \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{z}_1} \vec{v}_2, \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(3 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{(2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.55}$$

Se calculado, é possível verificar que  $\langle \vec{z}_1, \vec{z}_2 \rangle = 0$ . Por fim, pode-se calcular a base ortonormal ao normalizar os vetores de  $S_2$  e criar a base ortonormal  $S_3 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  de forma que  $\vec{u}_1 = \vec{z}_1/|\vec{z}_1|$  e  $\vec{u}_2 = \vec{z}_2/|\vec{z}_2|$ . Como  $|\vec{z}_i| = \sqrt{\langle \vec{z}_i, \vec{z}_i \rangle}$ , então,  $|\vec{z}_1| = \sqrt{5}$  e  $|\vec{z}_2| = 1/\sqrt{5}$ .

Sendo possível escrever a base ortonormal  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  como,

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{u}_2 = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

O expoente de Lyapunov  $\lambda$  é calculado a partir da média da taxa de crescimento das projeções do vetor  $\vec{v}$  sobre a base ortonormal  $\vec{u}$  após um tempo longo.

O processo de RGS nunca afeta a direção do primeiro vetor e permite que o sistema busque a direção no espaço tangente que cresce mais rapidamente. Desta maneira, tem-se que  $v_1 \sim 2^{\lambda_1 t}$ , então, ao monitorar a taxa de crescimento de  $v_1$ , obtém-se o autovalor  $\lambda_1$  nesta direção. Uma vez que o segundo vetor  $v_2$  é reortonormalizado, ele não tem a liberdade de se direcionar na segunda direção que cresce mais rapidamente, porém, os vetores  $v_1$  e  $v_2$  vão em direção ao subespaço que cresce mais rapidamente. Uma vez que  $v_1$  é perpendicular a  $v_2$ , a área definida por estes dois vetores é proporcional a  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ . Com isto, também é possível calcular o autovalor  $\lambda_2$  a partir da taxa de crescimento de  $v_2$  [12, 39].

Nos casos com dimensão  $k > 2$ , a construção da base ortonormal pode ser generalizada da forma [12, 39],

$$\begin{aligned} \vec{z}_k^{(1)} &= \vec{v}_k - \text{proj}_{\vec{z}_1} \vec{v}_k, \\ \vec{z}_k^{(2)} &= \vec{u}_k^{(1)} - \text{proj}_{\vec{z}_2} \vec{u}_k^{(1)}, \\ &\vdots \\ \vec{z}_k^{(k-1)} &= \vec{u}_k^{(k-2)} - \text{proj}_{\vec{z}_{k-1}} \vec{u}_k^{(k-2)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

## 2.5 Movimento no Retrato de Fases

Um oscilador bidimensional (2D) com energia  $E$  constante e *Hamiltoniana* integrável que não depende explicitamente do tempo pode ser expresso em termos das variáveis ação-ângulo,

$$H = H(J_1, J_2) = E, \quad (2.58)$$

com  $J_1$  e  $J_2$  sendo constantes de movimento. Uma vez que a energia é constante, um estado é representado por  $J_1$ ,  $J_2$  e  $t$  e o espaço de fases é tridimensional ( $3D$ ). Se alguma das ações  $J$  for constante, o sistema pode ser reduzido para um espaço de fases  $2D$ . Na superfície bidimensional, o movimento angular passa a ser parametrizado pelas frequências associadas a cada grau de liberdade

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1 t + \theta_{10}, \\ \theta_2 &= \omega_2 t + \theta_{20}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

em que  $\omega_1 = \dot{\theta}_1$  e  $\omega_2 = \dot{\theta}_2$  e cada variável angular é periódica com período  $2\pi$ .

Uma maneira conveniente de descrever o movimento no retrato de fases é representar o movimento em um torus, como mostrado na Figura 2.3.

Ao assumir uma quantidade de energia  $E$  constante, examina-se o movimento em um dos dois graus de liberdades ao escolher, por exemplo,  $\theta_2$  constante. As sucessivas vezes que a trajetória cortar o plano  $J_1 - \theta_1$  definido para este  $\theta_2$ , descreverá um movimento neste plano em termos das duas frequências  $\omega_1$ , frequência que a trajetória circula no plano e,  $\omega_2$ , frequência que a trajetória cruza o plano.

A razão  $\alpha = \omega_1/\omega_2$  indica a possibilidade da trajetória repetir algum ponto no espaço de fases. Se  $\alpha$  for um número irracional, o ponto não se repetirá dentro de um tempo suficientemente longo e o movimento é dito quase periódico e a trajetória preencherá o toro densamente no espaço de fases, o que forma uma curva quase contínua na seção de Poincaré. Se  $\alpha$  for um número racional, ou seja,  $\alpha = m/n$  com  $m$  e  $n$  inteiros, a trajetória se repetirá em algum ponto do espaço de fases indicando uma órbita fechada e o movimento será periódico. Por exemplo, se  $m = 3$  e  $n = 5$ , significa que a trajetória retornou a um ponto no mesmo tempo que percorreu 3 (três) voltas no plano em movimento circular e cruzou a seção de Poincaré 5 (cinco) vezes [4].

Como foi discutido na Seção 2.2.2, ao adicionar uma pequena perturbação no oscilador descrito pela *Hamiltoniana* apresentada na Equação (2.58), o mesmo deixa de ser linear para não-linear e a Hamiltoniana passa a ser quase integrável, ou seja

$$H(\vec{J}) = H_0(\vec{J}) + \epsilon H_1(\vec{J}). \quad (2.60)$$

Quando  $\epsilon = 0$ , a Hamiltoniana retorna a forma não perturbada e, como discutido até então, a trajetória está confinada em um torus conforme mostrado na Figura 2.3.

### 2.5.1 Teorema KAM

Vladimir I. Arnold e Juergen K. Moser em meados de 1960, seguiram uma conjectura proposta por Andrey N. Kolmogorov em 1954, e provaram o *teorema KAM*, que explica o que acontece com uma curva invariante no espaço de fases quando é introduzido o termo de perturbação na Hamiltoniana 2D inicialmente não perturbada. Em 1961 e 1962, Arnold provou o teorema KAM impondo que o termo não linear  $H_1$  é analítico, ou seja, todas as derivadas de qualquer ordem existem. Em 1962, Moser considerou a existência de derivadas até uma determinada ordem [4, 32].

O teorema *KAM* garante que quando um sistema está sujeito a perturbações não lineares, alguns torus são destruídos e outros deformados. Os torus formados por trajetórias quase periódicas, ou seja, quando  $\alpha = \textit{irrational}$ , são os que mais resistem as perturbações antes de serem destruídos. Um exemplo de como pode ocorrer tal deformação aparece na Figura 2.11.

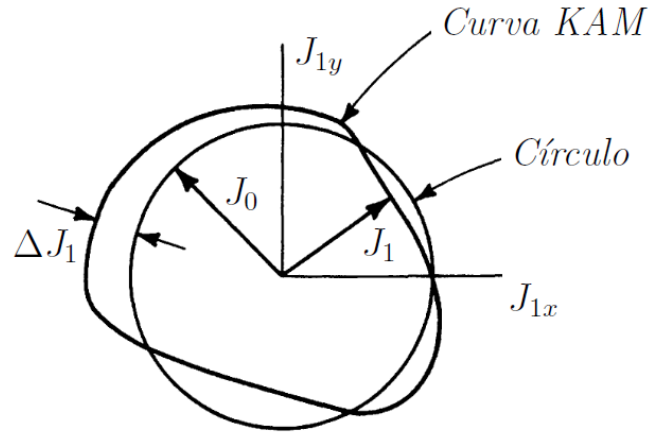


Figura 2.11: *Superfície KAM formada pela deformação de um torus. O círculo de raio  $J_0$  indica o movimento não perturbado. Após perturbação, a curva deforma uma quantidade  $\Delta J_1$  [4].*

Esses torus recebem a denominação de *superfícies KAM* e a última superfície a ser destruída corresponde ao *número de rotação*  $\alpha$  mais irracional [4, 32].

Uma boa maneira de aproximar um número irracional por números racionais é por meio de uma expansão de frações continuadas [4]

$$\beta = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad (2.61)$$

escrito mais conveniente por  $\beta = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ . Um exemplo que pode ser usado é o cálculo dos decimais de  $\pi$ , que pode ser escrito por  $\pi - 3 \approx 0,14159$ . A expansão em frações continuadas é dada por  $\beta = [7, 15, 1, 293, 1, \dots]$ . Um rápido aumento dos valores dos  $a'_n$ s indica rápida convergência da série. Ou seja, a série mais irracional vai ocorrer quando  $\beta = [1, 1, 1, 1, \dots]$ . No mapa padrão, o teorema KAM garante que o último toros a ser quebrado com as perturbações não lineares é aquele cujo número de rotação  $\alpha = \omega_1/\omega_2$  é o mais irracional possível. Ou seja, quando a série converge para a *razão áurea*

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (2.62)$$

## 2.5.2 Variedades

O comportamento dinâmico de um sistema não-linear é governado por curvas invariantes conhecidas como *variedades estáveis* e *variedades instáveis* que estão associadas aos pontos de sela de órbitas periódicas [40]. Quando Poincaré, em 1905, analisou o problema de três corpos, mostrou que as trajetórias podem tornar-se muito complexas nos pontos onde ocorrem cruzamentos das *variedades* sugerindo que a dinâmica apresente comportamento irregular ou caótico [40].

Seja um mapa diferenciável  $F$  com dimensão  $N$  e com inversa diferenciável. Um ponto  $x$  é dito fixo quando  $F(x) = x$ . Este ponto fixo é dito *ponto de sela* se a Matriz Jacobiana  $DF(x)$  das derivadas parciais calculadas no ponto  $x$  possui pelo menos um autovalor com módulo maior que 1 e outro menor que 1. Pode-se dizer para o mapa  $F$  que, os autovalores  $|\lambda_u| > 1$  estão na direção instável (observe o sub-índice  $u$  para instável) enquanto que  $|\lambda_s| < 1$  estão na direção estável (observe o sub-índice  $s$  para estável). Em maiores detalhes, quando  $x$  é um ponto de sela, existe uma curva diferenciável  $\gamma_s$  nas vizinhanças de  $x$  representando uma trajetória estável fazendo com que  $F^k(y) \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$  (a notação é que  $k$  representa a  $k$ -ésima iterada do mapa



definindo  $F^k(y) = F_k[F_{k-1} \dots F_2[F_1(y)]]$  como sendo a  $k$ -ésima imagem). Desta forma, pode-se dizer que  $\gamma_s$  é a *variedade estável* formada por pontos que vão na direção de  $x$  conforme o mapa é iterado para frente e possui a propriedade de ser invariante sob a transformação  $F$ . De maneira similar, as *variedades instáveis* são formadas por  $\gamma_u$  levando a  $F^{-k} \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ . As trajetórias formadas próximas às variedades instáveis, direcionam-se a  $x$  quando o mapa inverso é iterado, ou seja, quando o mapa é iterado para trás [40].

Um ponto é dito *homoclínico* se as variedades *estável* e *instável* encontram-se num ponto fora do ponto de sela  $x$ . Como já discutido na Seção 2.5.3, a existência de um ponto homoclínico implica na existência de mais pontos infinitamente. Neste caso, a dinâmica se torna complexa podendo dar origem às regiões de caos [4, 40].

A partir da Equação (2.32), o mapa inverso pode ser calculado com a inversão dos índices  $n$  (pré-iteração) e  $(n+1)$  (pós-iteração). Esta troca representa que o mapa é iterado para trás no tempo, ou seja,

$$\begin{cases} p_n &= p_{n+1} + k \sin(\theta_{n+1}), \\ \theta_n &= \theta_{n+1} + p_n \mod 2\pi. \end{cases} \quad (2.63)$$

Rearranjando a Equação (2.63), chega-se ao mapa padrão inverso:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} &= \theta_n - p_n, \\ p_{n+1} &= p_n - k \sin(\theta_{n+1}) \mod 2\pi. \end{cases} \quad (2.64)$$

### 2.5.3 Teorema de Poincaré-Birkhoff

De acordo com o *teorema KAM*, as superfícies com  $\alpha = \omega_1/\omega_2$  suficientemente irracional, tem sua topologia mantida e são apenas deformadas a partir de uma superfície circular não perturbada. Porém, quando  $\alpha$  se aproxima de um valor racional, o torus KAM é destruído e o teorema perde a validade.

O *teorema de Poincaré-Birkhoff* afirma que quando o torus é destruído, há o aparecimento de  $2k\omega_2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) pontos no lugar do torus. Metade dos pontos ( $k\omega_2$ ) são *centros* (elípticos) e a outra metade *selas* (hiperbólicos) [4, 32].

O teorema não faz nenhuma reivindicação sobre qual deve ser o valor de  $k$ , embora na maioria dos casos,  $k = 1$ .

Considera-se que o aumento de  $\alpha$ , as curvas são levadas para fora da ilha formada por  $\omega_2$  iterações e que, o espaço de fases é mapeado no sentido anti-horário quando  $\alpha > \omega_1/\omega_2$  e no sentido horário quando  $\alpha < \omega_1/\omega_2$ . Os pontos são então mapeados no sentido radial da linha sólida para a pontilhada, como mostrado na Figura 2.12. Devido a propriedade conservativa, as áreas formadas pelas linhas sólida e pontilhada, são iguais. Isto só é possível se as duas curvas (pontilhada e contínua) cruzarem uma na outra um mesmo número de vezes. Em cada cruzamento a trajetória retorna para o ponto inicial após iterar  $\omega_2$  vezes, sendo estes os pontos fixos. Então, para o mesmo número de cruzamentos deve aparecer  $2k\omega_2$  pontos que são os pontos fixos de Poincaré-Birkhoff [4].

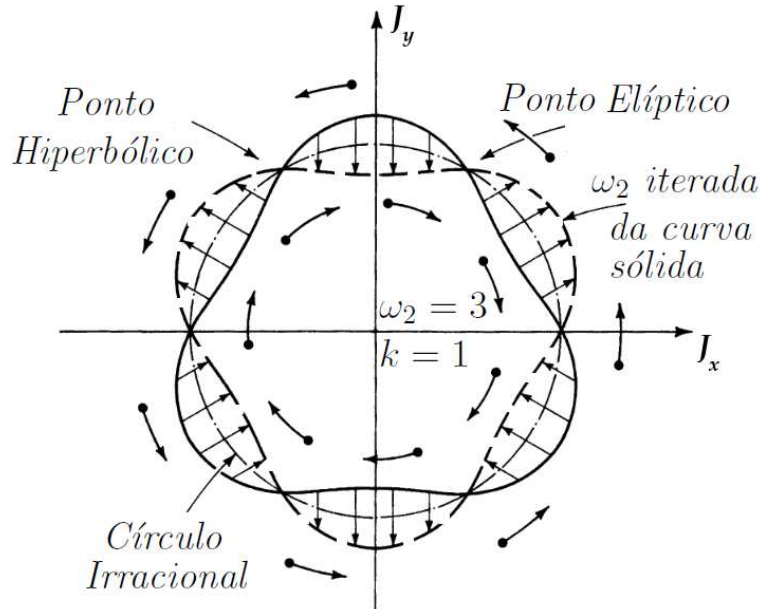


Figura 2.12: Ilustração do teorema de Poincaré-Birkhoff em que alguns pontos fixos são preservados após pequena perturbação [4].

Examinando-se o mapeamento nas vizinhanças dos pontos fixos da Figura 2.12, observa-se dois tipos de comportamento distintos. Próximo do ponto fixo rotulado como *Elíptico*, os pontos em que  $\alpha \neq \omega_1/\omega_2$  tendem a se conectar com a transformação radial formada pelos pontos  $\alpha = \omega_1/\omega_2$ . Desta forma, estes pontos tendem a circular em torno do ponto fixo, de acordo com a ilustração na Figura 2.13(b). Próximo do ponto fixo rotulado como *Hiperbólico*, a tendência é que os pontos se afastem do ponto

fixo, de acordo com a Figura 2.13(a).

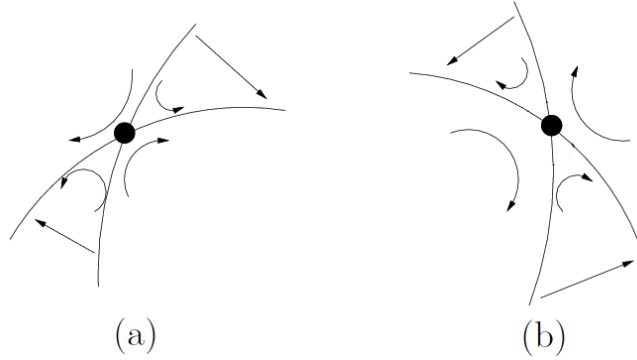


Figura 2.13: Ilustração dos pontos Hiperbólico (a) e Elíptico (b).

- *Pontos Elípticos*: São caracterizados por serem estáveis mantendo a trajetória do espaço de fases sempre próxima de seu ponto elíptico (ou ponto ressonante). Ao examinar a trajetória de uma órbita elíptica nas vizinhanças de seu ponto fixo, verifica-se a existência de um grupo de pontos ressonantes de ordem maior com comportamentos similares, porém com escala menor [4]. Estes novos pontos são menores e podem ser proporcionais a  $1/\omega_2$ .
- *Pontos Hiperbólicos*: São caracterizados por serem instáveis e uma trajetória iniciada nas vizinhanças deste ponto tende a se afastar do mesmo. Estes pontos são conectados por separatrizes e cada ponto pode ser descrito por 4 (quatro) curvas, duas se aproximando do ponto fixo com hamiltoniana  $H^+$  e duas se afastando do ponto fixo com hamiltoniana  $H^-$ . Uma ilustração deste movimento foi desenhada em 1962 por Melnikov [4] e é mostrada na Figura 2.14.

Dada uma condição inicial de um ponto qualquer  $P$  sobre a linha de  $H^+$  segundo uma transformação  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n$ , a trajetória é levada a convergir para o ponto de singularidade (variedades estáveis) enquanto que, no caso da condição inicial dada sobre a curva  $H^-$ , a trajetória converge para o ponto de singularidade sob uma transformação inversa  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}$  (variedades instáveis). Dados dois pontos hiperbólicos consecutivos, a trajetória que sai de um ponto hiperbólico  $H^-$  cruza a trajetória  $H^+$  que sai do ponto seguinte, em  $X$ . Este encontro é chamado de *ponto homoclínico*. O primeiro cruzamento representado em  $X$  implica em

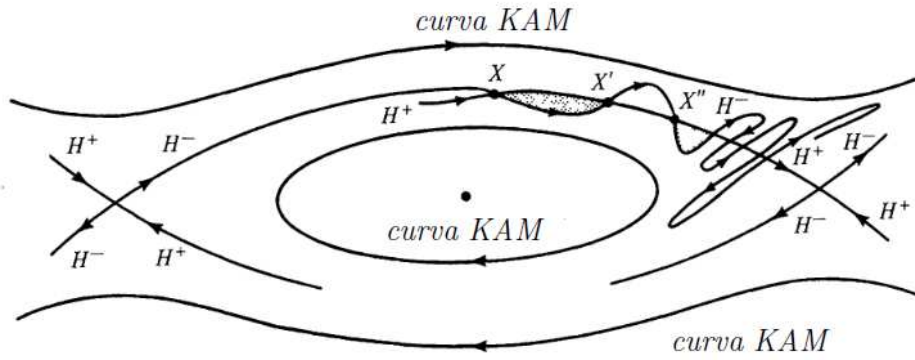


Figura 2.14: *Ilustração de Pontos Hiperbólicos [4].*

cruzamentos seguintes  $(X', X'', \dots)$  de maneira que  $X''$  é mais próximo de  $X'$  do que  $X'$  está de  $X$  (e assim por diante). As áreas entre as trajetórias de  $H^+$  e  $H^-$  entre dois cruzamentos consecutivos são conservadas. Devido ao fato de que os pontos de cruzamento estão cada vez mais próximos, verifica-se que  $H^-$  oscila cada vez mais em torno de  $H^+$ . Esta infinidade de cruzamentos próximo do ponto de singularidade é chamada de *emaranhamento homoclínico* [4].

Em resumo, quando um toro irracional é perturbado suficientemente a ponto de ser destruído, pontos elípticos são formados e em torno deles são formadas as ilhas de ressonância imersas no mar caótico enquanto que, nos locais em que aparecem os pontos hiperbólicos, as trajetórias são instáveis e são regiões importantes para o aparecimento de caos.

#### 2.5.4 Relação entre as ressonâncias

Seja um sistema integrável sob ação de uma perturbação. A função Hamiltoniana perturbada possui vários modos ressonantes que, pode-se considerar dois deles, exemplificados por  $\alpha_1 = \omega_1/\omega_2$  e  $\alpha_2 = \gamma_1/\gamma_2$ , como sendo modos primários consecutivos. Considera-se que cada modo modifique a topologia da superfície ressonante ao qual ele pertence de forma que um modo não interfere no outro. Cada modo ressonante é formado por uma região (ilha) limitada por uma curva separatriz. Para as trajetórias próximas das curvas separatrizes entre os dois modos ressonantes, não existem curvas invariantes e as trajetórias preenchem as áreas entre as separatrizes [4].

Ilhas secundárias surgem nas regiões em que há certas combinações entre as frequências que definem os modos primários  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , ou seja, nas regiões em que [4, 32]

$$\alpha = \frac{(\omega_1 + \gamma_1)}{(\omega_2 + \gamma_2)} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{(\omega_1 - \gamma_1)}{(\omega_2 - \gamma_2)}. \quad (2.65)$$

O acoplamento entre os modos primários e os secundários geram ilhas terciárias, e assim por diante. Desta maneira, surgem ilhas de todas as ordens [4, 32, 41].

## 2.6 Stickiness

Segundo [5], o termo *Stickiness* (palavra em inglês utilizada neste contexto para as trajetórias que “grudam” em alguma região específica por um tempo longo) foi introduzido pela primeira vez em 1983 por Karney. O efeito refere-se à órbitas caóticas que permanecem em alguma região por um longo período de tempo antes de escaparem. Stickiness aparece, por exemplo, próximo de bordas de ilhas de estabilidade no espaço de fases de um sistema dinâmico hamiltoniano 2D. Este efeito é pronunciado quando um torus KAM em torno de uma ilha é destruído aparecendo um grupo de pontos em torno da ilha conhecido como *cantori* [5].

Observa-se Stickiness em torno de ilhas de estabilidade e, em regiões distantes destas ilhas, dentro do mar caótico. Segundo Contopoulos, o primeiro caso foi observado, em 1971 pelo próprio [5], em torno de duas ilhas de estabilidade na tentativa de encontrar o limite da ilha em um sistema com dois graus de liberdade. Na Figura 2.15, as regiões mais escuras representam os locais em que as trajetórias permaneceram mais tempo.

O mesmo efeito também foi encontrado mais tarde, em 1982, por Shirts and Reinhardt, por Karney, em 1983, Meiss *et al.*, em 1983 e Menjuk, em 1983 e 1985 [5].

Como previsto no teorema KAM, conforme há aumento na perturbação, as curvas invariantes (torus KAM) podem ser deformadas ou destruídas. Quando a curva KAM invariante mais externa é destruída, o qual forma-se os *cantori*, aparecem uma infinidade de lacunas por meio das quais órbitas conseguem escapar. Um pouco antes da formação destas estruturas, uma camada caótica é formada dentro da última curva KAM. No entanto, esta última curva não permite comunicação entre a camada caótica

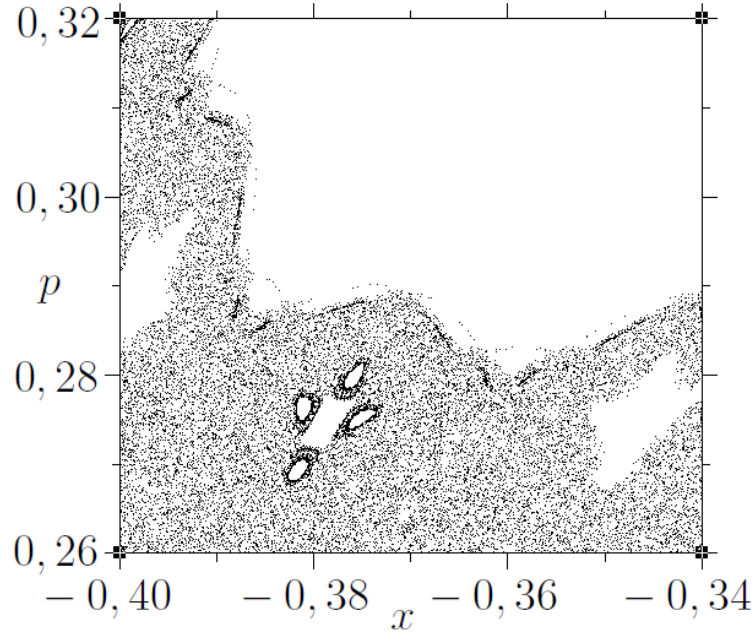


Figura 2.15: *Ampliação do retrato de fases  $(x,p)$  do mapa padrão com  $k = 2,5$ . As regiões mais escuras são exemplo do efeito de Stickiness em torno de ilhas regulares. Para construção desta figura, foram dadas  $10^7$  iteradas a partir da condição inicial no ponto caótico  $(x_0; p_0) = (0, 2; 0, 3)$ .*

que se encontra em seu interior com o mar caótico externo. Imediatamente após a formação dos *cantori*, as lacunas por onde a trajetória poderia escapar são pequenas e a órbita fica aprisionada por um longo tempo antes escapar para o mar caótico. É neste instante que o fenômeno de stickiness aparece. Apesar de não ser um efeito linear, o tempo para o escape diminui com o aumento da perturbação [5].

## 2.7 Hiperbolicidade

O processo de RGS perde a informação dos ângulos entre as diferentes direções instáveis. Há um interesse em calcular estes ângulos porque, como visto na Figura 2.14, que mostra as variedades estáveis  $H^+$  e instáveis  $H^-$ , as regiões em que elas se cruzam quase verticalmente, espera-se uma dinâmica bem mais instável na direção transversal a  $H^+$  do que nas outras regiões. A medida dos Expoentes de Lyapunov (ELs) têm importante papel na descrição de sistemas dinâmicos caóticos devido suas propriedades

intrínsecas que permitem quantificar diferentes propriedades físicas do sistema como, sensibilidade às condições iniciais, entropia local ou dimensão de atratores. Porém, existe um grande interesse não somente nos valores dos ELs, mas também em alguns vetores correspondentes a eles com a motivação de que estes vetores devem contribuir para identificar regiões de forte ou fraca estabilidade [46].

Uma abordagem muito utilizada para o estudo de caracterização de sistemas dinâmicos se refere ao uso dos vetores gerados pelo procedimento de *Gram-Schmidt*, chamados de *vetores de Gram-Schmidt* (VGS), que servem de base para o cálculo dos ELs. A desvantagem destes vetores, é que eles são ortonormais mesmo quando as variedades estáveis e instáveis são quase tangentes. Além disso, os VGS são invariantes em tempos reversos [46].

Deve-se considerar que nem todos os sistemas dinâmicos são totalmente hiperbólicos, ou seja, as variedades estáveis e instáveis não são transversais em todo espaço, por isso, é importante o uso de ferramentas capazes de quantificar seu *grau de hiperbolicidade*. Os *vetores de Lyapunov covariantes* (VLC), construídos a partir da iteração de um sistema dinâmico para *frente* (expansão) e para *trás* (contração) no tempo, permite esta quantificação. Um sistema dinâmico é dito *hiperbólico* se as variedades estáveis e instáveis são transversais entre si em todo espaço. O *grau de hiperbolicidade* pode ser testado pela determinação do ângulo entre cada par  $(j, s)$  das iterações para *frente* ( $j$ ) e para *trás* ( $s$ ) dos VLC. O ângulo é determinado por [46]

$$\phi_n^{j,s} = \cos^{-1}(|\vec{V}_n^j \cdot \vec{V}_n^s|), \quad (2.66)$$

com  $\vec{V}^j(x, p)$  o VLC associado ao Expoente de Lyapunov (EL) máximo  $\lambda_{max}^j$  quando o sistema é iterado para frente e  $\vec{V}^s(x, p)$  o VLC associado ao EL mínimo  $\lambda_{min}^s$  quando iterado para trás. Os VLC são tangentes às variedades no ponto  $(x, p)$ .

Seja um exemplo, o ponto  $(x_0; p_0) = (0, 2; 0, 3)$  do mapa padrão conservativo descrito na Equação (2.32) para  $k = 2, 5$  e sua inversa descrita na Equação (2.64). Ao iterar o mapa, considera-se que a coordenada temporal evolui para frente enquanto que, as iterações para trás são feitas a partir da evolução do mapa inverso. A matriz Jacobiana do mapa (frente) é dada por:

$$J_{fr} = \begin{pmatrix} 1 & k \cos(2\pi x_0) \\ 1 & 1 + k \cos(2\pi x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,773 \\ 1 & 1,773 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1^{fr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{v}_2^{fr} = \begin{pmatrix} 0,773 \\ 1,773 \end{pmatrix},$$

em que  $\vec{v}_1^{fr}$  e  $\vec{v}_2^{fr}$  são os vetores nas direções tangente quando o mapa é iterado para frente. Deve-se calcular coeficientes proporcionais aos auto valores a fim de que seja possível o cálculo dos auto vetores. Uma forma, é separar a matriz Jacobiana  $J^{fr}$  como um produto entre uma matriz diagonal superior,  $R_{fr}$ , e uma matriz de base ortonormal,  $Q_{fr}$ , ou seja,  $J_{fr} = Q_{fr}R_{fr}$ . Para isto, pode-se utilizar do método de RGS.

Define-se  $\vec{U}_1^{fr} = \vec{v}_1^{fr}$  e  $\vec{U}_2^{fr} = \vec{v}_2^{fr} - \text{proj}_{\vec{v}_1^{fr}} \vec{v}_2^{fr}$ , ou seja,

$$\vec{U}_2^{fr} = \begin{pmatrix} 0,773 \\ 1,773 \end{pmatrix} - \frac{(1 \ 1) \begin{pmatrix} 0,773 \\ 1,773 \end{pmatrix}}{(1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

A matriz de base ortonormal é dada por:

$$Q_{fr} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{U}_1^{fr}}{|\vec{U}_1^{fr}|} & \frac{\vec{U}_2^{fr}}{|\vec{U}_2^{fr}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -0,5/\sqrt{0,5} \\ 1/\sqrt{2} & 0,5/\sqrt{0,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{0,5} & -\sqrt{0,5} \\ \sqrt{0,5} & \sqrt{0,5} \end{pmatrix},$$

de maneira que  $Q_{fr}^T$  (transposta de  $Q_{fr}$ ) e  $Q_{fr}$  obedecem a relação  $Q_{fr}^T Q_{fr} = I$ ,  $I$  é a matriz Identidade. Ao considerar a matriz Jacobiana  $J^{fr}$  como produto  $Q_{fr}R_{fr}$ ,

$$\begin{aligned} J_{fr} &= Q_{fr}R_{fr}, \\ Q_{fr}^T J_{fr} &= Q_{fr}^T Q_{fr} R_{fr}, \\ Q_{fr}^T J_{fr} &= R_{fr}. \end{aligned}$$

A matriz diagonal superior  $R_{fr}$ , dada por,

$$R_{fr} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -0,5/\sqrt{0,5} & 0,5/\sqrt{0,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,773 \\ 1 & 1,773 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1,8 \\ 0 & \sqrt{0,5} \end{pmatrix},$$

fornece os auto valores  $\lambda_1^{fr} = \sqrt{2}$  e  $\lambda_2^{fr} = \sqrt{0,5}$ . A partir do maior auto valor,  $\lambda_1^{fr}$ , calcula-se o respectivo auto vetor,  $\vec{V}^j = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , que é o VLC do mapa iterado para frente. Então, a partir de

$$J^{fr} \vec{V}^j = \lambda_1^{fr} \vec{V}^j$$

calcula-se



$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -0,5/\sqrt{0,5} & 0,5/\sqrt{0,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Já normalizado, o VLC é dado como:

$$\vec{V}^j = \begin{pmatrix} 0,8814 \\ 0,4724 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Para o tempo reverso, evolui-se o mapa inverso dado na Equação (2.64), que foi obtido com a troca dos índices  $n \rightarrow n + 1$  e vice-versa. Então, a condição inicial utilizada no mapa inverso,  $(x_1; p_1)$ , deve ser adquirida com a solução fornecida por uma iterada do mapa padrão com condição inicial  $(x_0; p_0)$  utilizada anteriormente, ou seja,

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_0) = 0,6784, \\ x_1 = x_0 + p_1 = 0,8784. \end{cases} \quad (2.68)$$

Repete-se os passos realizados na construção do vetor  $\vec{V}^j$  para construção do vetor  $\vec{V}^s$  a partir do mapa inverso. A matriz Jacobiana para este caso é dada por:

$$J_{tr} = \begin{pmatrix} 1,0000 & 1,0000 \\ -1,8051 & 2,8051 \end{pmatrix}.$$

O que leva a matriz de base ortonormal

$$Q_{tr} = \begin{pmatrix} 0,4846 & 0,4787 \\ -0,8747 & 0,4846 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, a matriz diagonal superior representada por

$$R_{tr} = \begin{pmatrix} 2,0636 & -2,9384 \\ 0,0000 & 0,4846 \end{pmatrix},$$

fornece diretamente os auto-valores  $\lambda_1^{tr} = 2,0635$  e  $\lambda_2^{tr} = 0,4846$ . A partir do menor auto-valor, calcula-se o VLC reverso. Então,

$$J_{tr} \vec{V}^s = \lambda_2^{tr} \vec{V}^s.$$

O resultado para o VLC reverso é dado pelo vetor

$$\vec{V}^s = \begin{pmatrix} 0,8889 \\ 0,4581 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

A partir da Equação (2.66) e os resultados obtidos nas Equações (2.67) e (2.69), tem-se para o ângulo entre os vetores covariantes de Lyapunov que:

$$\phi^{j,s} = \cos^{-1}(|\vec{V}^j \cdot \vec{V}^s|) = 0,0153 \text{ rad} \rightarrow \sim 0,88^\circ. \quad (2.70)$$

O que mostra que o ponto  $(0, 2; 0, 3)$  é um ponto elíptico, pois os vetores covariantes de Lyapunov são, dentro de uma boa aproximação, paralelos.

# Capítulo 3

## Transição Conservativo-Dissipativo

### 3.1 Mapa Padrão Conservativo

Nesta tese, são realizados estudos numéricos sobre algumas propriedades da transição de um sistema conservativo para dissipativo. O modelo utilizado foi o mapa padrão descrito pela Equação (2.32) que, ao alterar-se a notação utilizada no Capítulo anterior, escreve-se o mapa de forma a ser computado em módulo 1 e, para a variável de posição  $\theta$ , substitui-se por “ $x$ ”. Com a nova notação, o mapa padrão fica escrito como

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) \quad \text{Mod}(1), \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \quad \text{Mod}(1), \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $x$  e  $p$  representam as variáveis de posição e momento canonicamente conjugado enquanto que  $k$  é o valor da intensidade do pulso periódico aplicado no pêndulo descrito na Figura 1.1 e, o sub-índice  $n$ , indica o número de iterações discretas do mapa, que faz o papel da coordenada temporal.

#### 3.1.1 Retrato de Fases

Primeiramente, pode-se reproduzir resultados sobre o mapa padrão ao analisar seu retrato de fases para alguns parâmetros específicos. Apesar do valor do parâmetro  $k$  utilizado em toda tese ser sempre o mesmo, o comportamento do mapa padrão é típico, ou seja, os efeitos que serão apresentados valem para outros valores de  $k$  que

apresente espaço de fases misto (regiões regulares e caóticas). Apresenta-se, como exemplo inicial, na Figura 3.1, o mapa padrão com  $k = 2, 5$ . Nesta figura, o eixo das abscissas é a variável de posição  $x$  enquanto que, o eixo das ordenadas, o momento  $p$ . Há presença simultânea de regiões regulares e caóticas de maneira que regiões regulares são formadas pelas linhas aparentemente contínuas/pontilhadas, que são as curvas KAM [5], e formam figuras que se assemelham aos torus irracionais/racionais quando imaginadas sob o ponto de vista tridimensional. As regiões sem forma definida são as regiões caóticas. Das 5 regiões regulares, as 4 menores circundam pontos de ressonância de período 4, enquanto que as curvas da região regular maior são formadas circundando um ponto de período 1, cuja posição está situada em  $p = 0$  e  $x = \pm 0,5$ . Os pontos da extremidade esquerda (acima) são os mesmos pontos da extremidade direita (abaixo), ou seja, se uma trajetória sai do espaço de fases pela esquerda (por cima), ela aparece do lado direito (por baixo). A linha contínua (vermelha) que aparece em  $p = 0$  e ocupa toda extensão de  $x$  no intervalo  $[-0,5 < x_0 < 0,5]$ , são os pontos utilizados como condição inicial  $(x_0, p_0)$  para construção desta figura com resolução de 200 condições iniciais.

A ampliação da região em destaque (retângulo vermelho) da Figura 3.1, permite construir uma das 4 ilhas de período 4 com melhor resolução (Figura 3.2). As linhas contínuas representam as órbitas quase-periódicas e são responsáveis pela formação dos torus irracionais de maneira que, não é possível calcular quantos pontos são necessários para construir estas curvas e, conseqüentemente, não tem como prever seu período, a não ser por uma precisão numérica. As linhas descontínuas, inclui-se as linhas pontilhadas e as sequências de pequenos círculos circundando pontos ressonantes, são os toros quase racionais e, nestes casos, é possível prever o respectivo período. Um exemplo de toro racional nesta figura é o de período  $7 \times 4$ , representado pelas 7 estruturas regulares (círculos disformes), cada uma em torno de um ponto ressonante de ordem maior que o do centro da ilha. O período é  $7 \times 4$  pois cada uma destas ilhas se repete 4 vezes no espaço de fases, como visto na Figura 3.1.

A Figura 3.2 é uma ampliação do retrato de fases da Figura 3.1 de maneira que, pode-se fazer quantas ampliações forem necessárias para observar em detalhes qualquer estrutura. Desta forma, verifica-se que um toro racional é, em alguns casos, formado por curvas invariantes irracionais menores, ou seja, pequenos círculos em torno de pontos ressonantes de ordem maior.

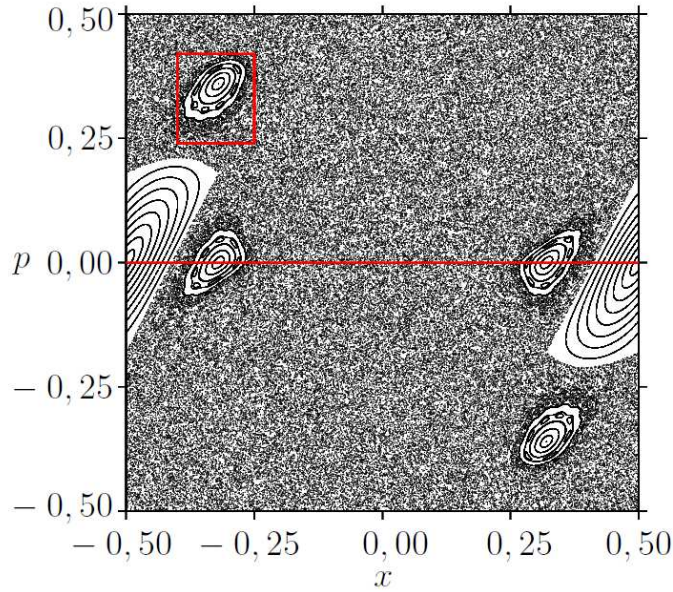


Figura 3.1: Retrato de fases do mapa padrão conservativo. Como condições iniciais, foram utilizados valores de  $x_0$  compreendidos no intervalo  $[-0,5 \leq x_0 \leq 0,5]$ , divididos de forma a ter 200 valores, e  $p_0 = 0,0$ . O valor do parâmetro que representa a intensidade do pulso do oscilador foi  $k = 2,5$  e o número de iteradas foi de  $10^4$  com transiente de  $8 \times 10^3$ .

### 3.1.2 Recorrência

Pode-se calcular o primeiro tempo de recorrência das trajetórias do mapa padrão conservativo. Este tempo é representado pelo número de iterações  $n$  e significa calcular quantas iteradas o mapa deve ter, a partir de uma dada condição inicial  $(x_0, p_0)$ , para que a trajetória se aproxime, pela primeira vez, do ponto de partida, ou seja, quando  $x_n \approx x_0$  e  $p_n \approx p_0$ . A Figura 3.3 foi gerada a partir das condições iniciais  $p_0 = 0$  variando a linha que abrange  $x_0$  no intervalo  $-0,5 < x_0 < 0,0$ . O eixo das ordenadas da figura superior está normalizado entre 0 e 1 para o primeiro tempo de recorrência limitado entre 0 e  $10^4$ . O raio de aproximação considerado foi de  $\rho = 10^{-4}$ . Espera-se para as trajetórias que formam as linhas regulares quase periódicas que os tempos das recorrências sejam, quando possíveis de serem calculados, maiores que nas regiões regulares periódicas. Ou então, ao comparar duas curvas quase-periódicas, é possível observar nesta figura que o tempo de recorrência de uma trajetória situada em uma curva mais próxima do ponto de ressonância é menor que o tempo das trajetórias mais

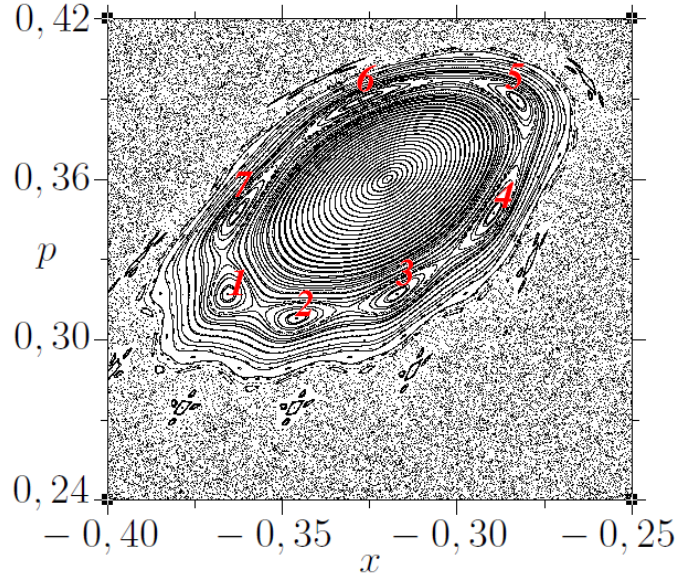


Figura 3.2: Ampliação da região em destaque da Figura 3.1. O valor utilizado para o parâmetro  $k$  e os valores das condições iniciais  $(x_0, p_0)$  são os mesmos da figura anterior.

afastadas, mesmo porque, uma vez que as curvas mais afastadas são maiores que as mais próximas, é menos provável sua reincidência pelo fato das curvas serem construídas com mais pontos. Nas regiões caóticas, a recorrência ocorre para um tempo muito longo [13].

## 3.2 Mapa padrão dissipativo

O mapa padrão se torna dissipativo com a introdução de um termo capaz de retirar energia a cada iterada. Trabalhos como os de Rodrigues *et al.* [21] e Wenzel *et al.* [37] introduzem um termo de dissipação no momentum, o que faz com que a energia se dissipe conforme ocorrem as iterações do mapa. O *teorema de Liouville* garante que o movimento de um sistema Hamiltoniano conserva o volume do retrato de fases, porém, o mesmo não acontece para sistemas dissipativos, que dão origem a contração do volume do retrato de fases o que explicita a perda de energia. Fenômenos como aparecimento de *atratores caóticos* nas regiões caóticas e redução da *constante de Feigenbaum* [47] (quando comparada ao caso conservativo), são características de sistemas dissipativos [4].

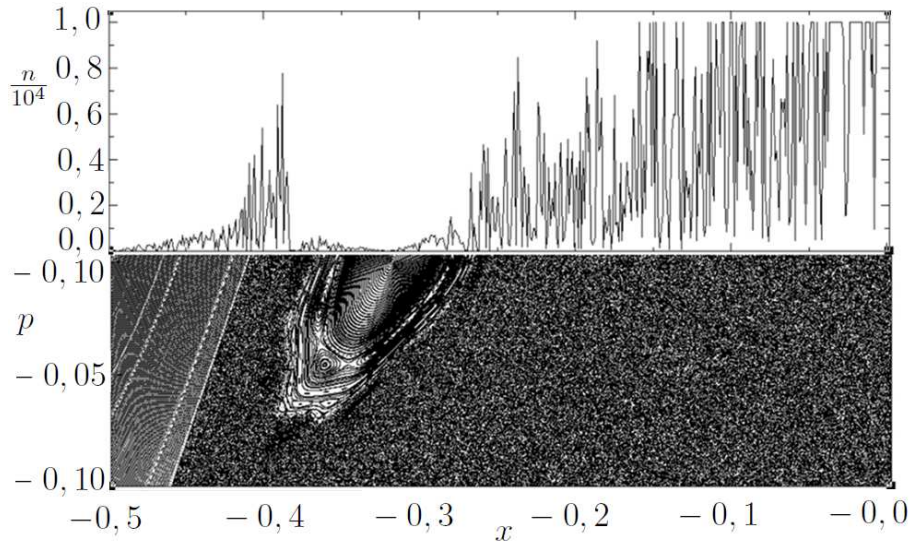


Figura 3.3: A figura superior mostra, no eixo das ordenadas, o tempo da primeira recorrência da linha  $p = 0,0$  e  $x = [-0,5 : 0,0]$  do mapa padrão conservativo, normalizado. A figura inferior é o retrato de fases neste intervalo. Como condição inicial foi utilizado o parâmetro  $k = 2,5$  e o número de iterações limitado em  $10^4$ , de maneira que na figura, está normalizado entre  $0,0$  e  $1,0$ . O raio de aproximação considerado foi de  $\rho = 10^{-4}$ .

### 3.2.1 Constante de Feigenbaum

Muitas das informações sobre sistemas dinâmicos são recolhidas dos estudos de suas órbitas periódicas e suas estabilidades. Seja um mapa não-conservativo unidimensional e dependente de um parâmetro de controle. Se sua órbita periódica for estável, seus atratores devem ser pontuais. Conforme varia-se o parâmetro, as órbitas periódicas perdem suas estabilidades gerando, muitas vezes, órbitas periódicas estáveis com período duplicado. Feigenbaum [32, 47, 48] encontrou que este efeito era frequente para uma sequência infinita de duplicações de período acumulados num intervalo finito de parâmetros e, além disso, a sequência de duplicação de período tem um comportamento universal.

A constante de Feigenbaum  $\delta$  relaciona-se às bifurcações em cascata (*flip*) que ocorrem em diferentes parâmetros de controle de um mapa. Para um mapa conservativo, é conhecido que  $\delta \simeq 8,7210972\dots$  [49]. Em 1978, M. J. Feigenbaum encontrou uma redução de  $\delta$  ao calculá-lo para uma cascata *flip* do mapa logístico,  $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$

[32] (dissipativo). Neste mapa, as bifurcações ocorrem de forma a duplicarem de período, então, deste modo, suas órbitas serão sempre de período- $2^l$  para todo  $l$ . O valor obtido foi:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_l - a_{l-1}}{a_{l+1} - a_l} \simeq 4,669201690\dots,$$

em que  $a_l$  representa o valor do parâmetro em que houve a duplicação de período.  $\delta$  indica o quanto se reduz a diferença entre os valores do parâmetro  $a$  associado a duas bifurcações consecutivas, como pode ser observado na Figura 3.4.

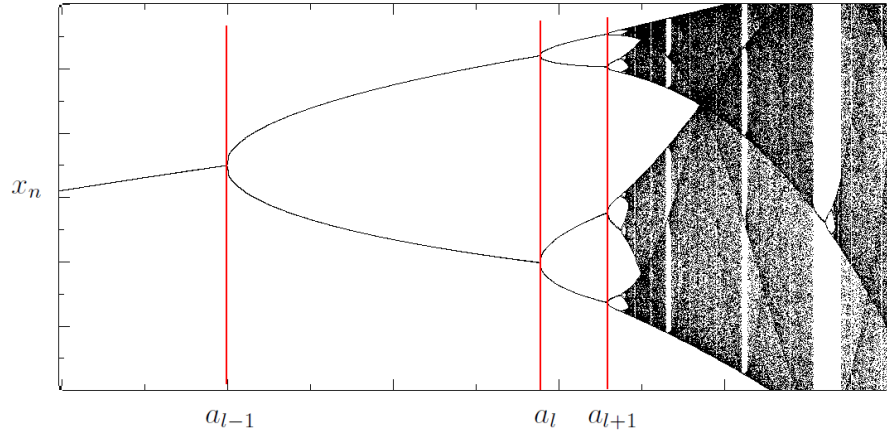


Figura 3.4: *Ampliação do diagrama de Bifurcação do mapa logístico.*

Outra constante de Feigenbaum é calculada a partir do valor da distância entre as curvas do diagrama de bifurcação e um ponto fixo tal que, o auto valor associado a esse ponto fixo seja nulo [32].

### 3.2.2 O mapa

O modelo utilizado para o mapa padrão dissipativo é dado por [4, 21, 37, 60]:

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1 - \gamma)p_n + \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n) \quad \text{Mod}(1), \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \quad \text{Mod}(1), \end{cases} \quad (3.2)$$

em que  $\gamma$  é o parâmetro de dissipação que pode variar de 0 (mapa padrão conservativo) a 1 (super-dissipativo). Os valores  $0 < \gamma \leq 1$  representam as condições para que o mapa se torne dissipativo.



O retrato de fases do mapa padrão com parâmetro de dissipação  $\gamma = 10^{-3}$  é mostrado na Figura 3.5. Nesta figura, as curvas, antes regulares quando comparadas com a Figura 3.1, aparecem sem forma definida devido as trajetórias terem perdido suas amplitudes com a perda de energia.

Como já mencionado, nosso interesse está em estudar como as curvas KAM, e trajetórias em geral, comportam-se quando a dissipação é adicionada. Aparentemente, as trajetórias podem direcionar-se para diferentes atratores dependendo da intensidade da dissipação. Como condições iniciais para formar a Figura 3.5 foram utilizados 200 valores na linha  $[-0,5 < x_0 < 0,5]$  e  $p_0 = 0,0$  (linha vermelha na figura). O valor do parâmetro de pulso foi  $k = 2,5$  e o número de iteradas foi  $n = 10^4$ .

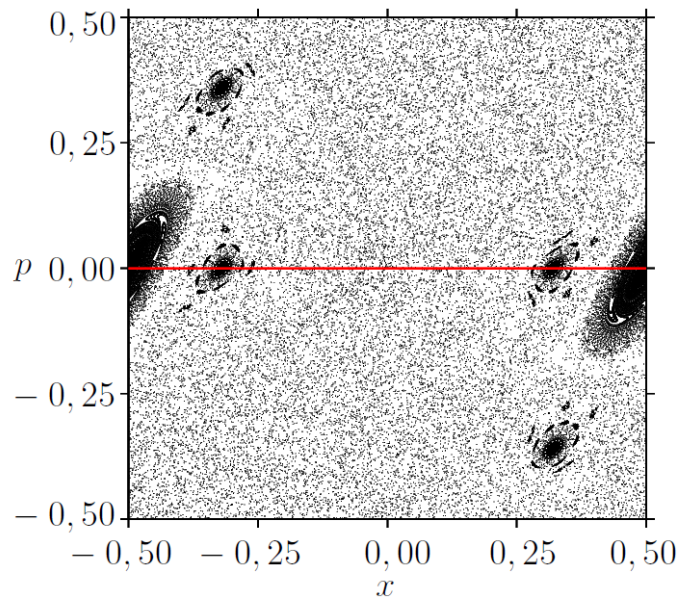


Figura 3.5: *Retrato de fases do mapa padrão dissipativo. Como condições iniciais, 200 valores no intervalo  $[-0,5 \leq x_0 \leq 0,5]$  e  $p_0 = 0,0$ . O parâmetro foi  $k = 2,5$  com  $10^4$  iteradas e  $\gamma = 10^{-3}$ .*

### 3.3 Transição para o Dissipativo

As trajetórias do mapa padrão são estudadas com o uso de diferentes parâmetros de dissipação  $\gamma$ . A prioridade é a transição do regime conservativo para o dissipativo em diferentes situações. A partir da ilha de período 4 (veja Figura 3.1), cujo

ponto ressonante central situa-se em  $(x; p) = (-0, 32; 0, 0)$ , serão feitas algumas simulações para entender os diferentes comportamentos de uma trajetória iniciada no ponto  $(x_0; p_0) = (-0, 31; 0, 0)$ , próximo do ponto central da ilha, com diferentes valores de  $\gamma$ . Os resultados para 4 situações diferentes estão na Figura 3.6.

A curva em vermelho da Figura 3.6(a) representa um toro do mapa padrão conservativo para uma única condição inicial. Uma vez que a condição inicial utilizada pertence a uma região regular, a trajetória não sai do toro ao qual ela pertence e a curva se forma em torno de um ponto de ressonância. A partir de então, analisa-se alguns casos dissipativos. A curva em vermelho da Figura 3.6(b) mostra os efeitos de uma pequena dissipação,  $\gamma = 10^{-4}$ . A contração do volume do retrato de fases devido as trajetórias convergirem em direção ao ponto central do toro ainda é pequena, o que faz com que a figura, dentro do número de iteradas utilizadas, se assemelhe a um anel.

Com o aumento da dissipação, a convergência se torna mais efetiva e a contração do volume do retrato de fases também. Isto está mais claro com os pontos em vermelho da Figura 3.6(c), formada com  $\gamma = 0, 1$ , em que o toro desaparece. Aparentemente, a trajetória converge para um atrator pontual ainda pertencente a região da ilha original de período 4, porém, quando a dissipação ultrapassa certo valor, a trajetória muda seu comportamento e passa a ser atraída para o centro da ilha maior, cujo ponto ressonante central é de período 1, ou seja, para o ponto  $(x; p) = (-0, 5; 0, 0)$ . Este efeito está exemplificado com os pontos em vermelho da Figura 3.6(d), em que foi utilizado  $\gamma = 0, 3$ . Para os 4 (quatro) casos da Figura 3.6, o mapa padrão conservativo está ao fundo na cor preta, para que se tenha uma referência dos efeitos mostrados pelas curvas dissipativas (curvas vermelhas).

A estrutura do retrato de fases da Figura 3.5 e os efeitos mostrados na Figura 3.6 podem ser analisados com mais detalhes a partir da Figura 3.7 com o uso de dois diferentes  $\gamma$ 's. Quanto maior  $\gamma$ , maior a perda de energia, como pode ser verificado comparando-se a Figura 3.7(a), formada por 5 atratores com o uso de  $\gamma = 0, 1$ , com a Figura 3.7(b), formada por apenas 1 atrator com o uso de  $\gamma = 0, 3$ . Nesta última, os volumes dos toros que formavam os 4 atratores menores reduziram-se de maneira que os atratores desapareceram.

As ilhas regulares podem ser complexas no que diz respeito a existência de ilhas de ressonância de diferentes ordens, como primárias, secundárias etc. É possível verificar nas Figuras 3.6 e 3.7 que, quando a dissipação é relativamente pequena, as ilhas tentem a convergir para seus respectivos pontos ressonantes, ou seja, ilhas terciárias

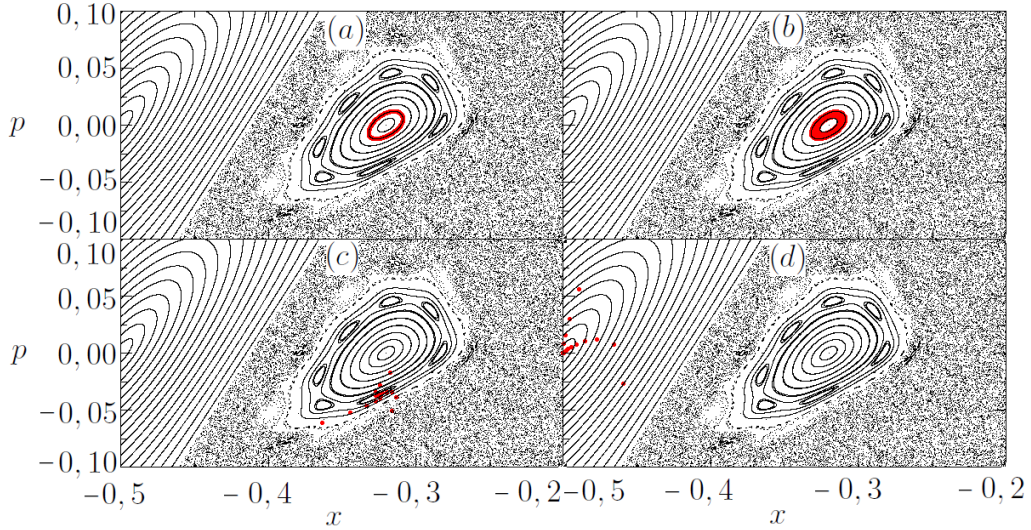


Figura 3.6: *Diferentes convergências de uma trajetória no retrato de fases em função da dissipação  $\gamma$ . Foi utilizado como condição inicial,  $x_0 = -0,31$ ,  $p_0 = 0,0$  e  $k = 2,5$ . O caso conservativo é apresentado na Figura (a) enquanto que, na Figura (b),  $\gamma = 10^{-4}$  e na Figura (c),  $\gamma = 10^{-1}$ . Na Figura (d),  $\gamma = 0,3$  e a trajetória “salta” para a região da ilha maior.*

convergem para pontos de ressonância terciária, ilhas secundárias convergem para pontos de ressonância secundária etc. Conforme aumenta-se a dissipação, as regiões que eram atratores de ilhas terciárias sofrem atração das ilhas secundárias e assim por diante. Isto explica a razão pelo qual os atratores menores mostrados na Figura 3.7(a) desaparecem e faz com que as trajetórias “saltem” para outros atratores ao convergir para o centro das ilhas maiores, como mostrado na Figura 3.7(b).

Os efeitos apresentados nas Figuras 3.6 e 3.7 podem ser vistos sob outro ponto de vista a partir da Figura 3.8, que mostra a posição de convergência de uma única trajetória,  $x_f$ , em função de  $\gamma$ . Para construção desta figura, inicia-se uma única trajetória a partir do ponto  $(x_0, p_0) = (-0,31; 0,0)$  e varia-se  $\gamma$  a partir do caso conservativo. Para cada  $\gamma$ , a trajetória é levada a um  $x_f$  diferente de forma que, para baixos valores de  $\gamma$ ,  $x_f$  converge para algum ponto próximo de  $x = -0,32$ , que corresponde ao ponto central (ressonância) da ilha ao qual foi dada a condição inicial. Isto ajuda a entender o motivo pelo qual as ilhas regulares perderam suas formas, como visto na Figura 3.5. O movimento de  $x_f$  é contínuo até  $\gamma \simeq 0,26$  e, a partir deste ponto, a trajetória muda abruptamente seu comportamento e converge para o centro da ilha maior, de período

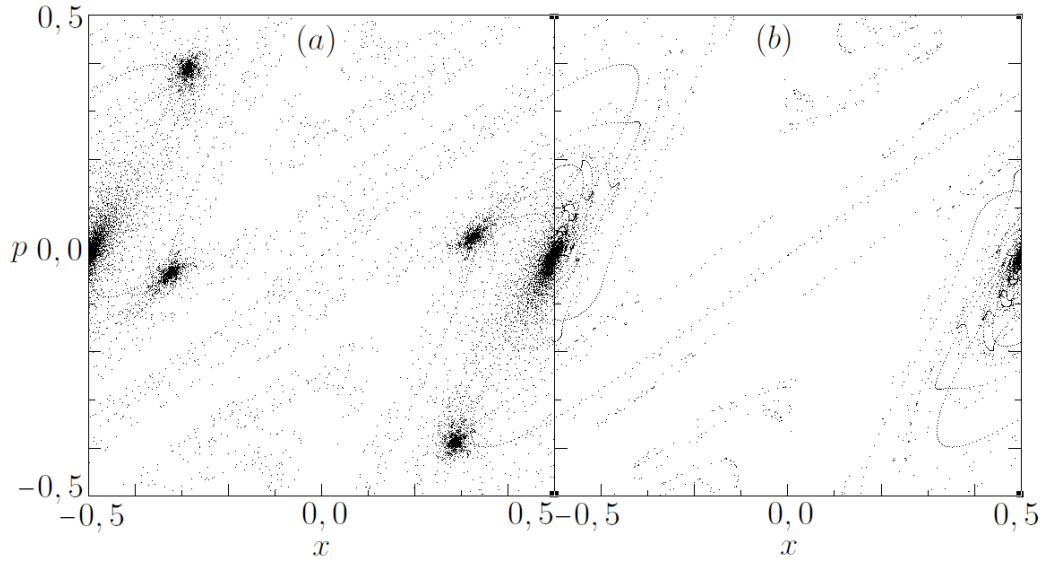


Figura 3.7: Retrato de fases com diferentes  $\gamma$ 's. Para Figura (a) foi utilizado  $\gamma = 10^{-1}$ , enquanto que para figura (b),  $\gamma = 0,3$ . Como condição inicial,  $k = 2,5$ .

1.

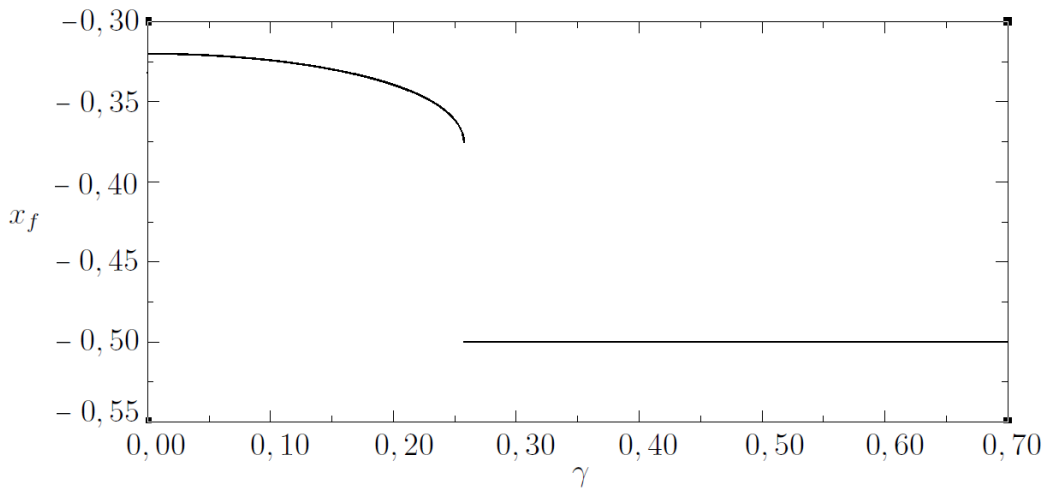


Figura 3.8: Ponto de convergência no espaço de fases,  $x_f$ , em função de  $\gamma$ . Condição inicial é única, dada por:  $(x_0, p_0) = (-0,31; 0,0)$  e  $k = 2,5$ .

Duas razões são importantes para explicar o deslocamento dos atratores. A primeira é o fato de que, para baixo  $\gamma$ , a trajetória não converge totalmente para o cen-

tro da ilha, como pode ser visto na Figura 3.6(b). Outra razão é que o próprio centro da ilha de período 4 (ressonância secundária) transita em torno da ilha de período 1 (ressonância primária). Para esta segunda afirmação, pode-se fazer um comparativo na Figura 3.9 entre os centros de uma mesma ilha de período 4 para os casos, conservativo,  $\gamma = 0$  (preto), e dissipativo,  $\gamma = 0,15$  (vermelho).

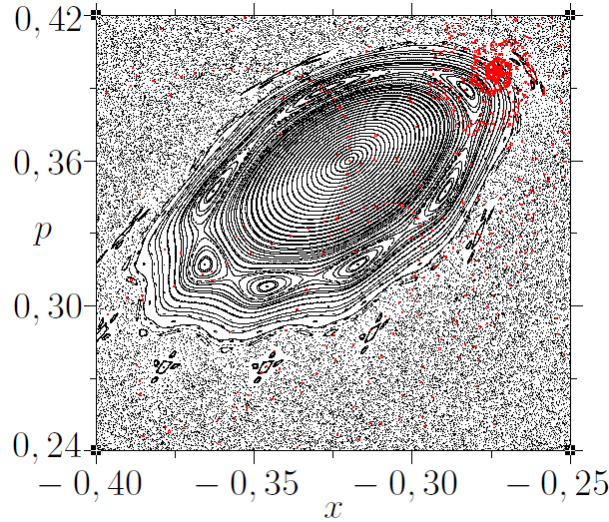


Figura 3.9: Ampliação do retrato de fases em que são mostrados, em preto, toros conservativos e, em vermelho, a mesma ampliação do retrato de fases com  $\gamma = 0,15$ . Observa-se o deslocamento dos atratores em função de  $\gamma$ . Para esta figura,  $k = 2,5$ .

Pode-se continuar as investigações dos efeitos de  $\gamma$  sob o ponto de vista da Figura 3.10. Esta figura mostra o ponto em que cada trajetória converge,  $x_f$ , em função das posições iniciais,  $-0,5 < x_0 < 0,5$ , em 4 dissipações diferentes. Os resultados são interessantes nas regiões próximas das ilhas regulares. A Figura 3.10(a) é construída com pouca dissipação,  $\gamma = 10^{-5}$ . Nesta, observa-se a tendência da trajetória convergir para seus respectivos centros, ou seja, os pontos iniciados nas proximidades de  $(x_0, p_0) = (-0,3; 0,0)$ , na ilha regular, convergem para o seu centro situado no ponto  $x = -0,32$  (indicado pela linha azul destacada na figura). O mesmo ocorre para as outras regiões próximas de seus respectivos pontos ressonantes como, por exemplo, nas regiões pertencentes a ilha maior, de período 1, em que as trajetórias tendem a convergir para seu ponto ressonante,  $x = \pm 0,5$  (indicado pela linha vermelha destacada na figura). Este efeito fica mais definido com o aumento de  $\gamma$ . Como visto na Figura 3.10(b), quando aumenta-se a dissipação para  $\gamma = 10^{-4}$ , as trajetórias de cada região

regular convergem mais claramente para seus respectivos centros.

Ao comparar as Figuras 3.10(c) e (d) é possível observar o mesmo efeito mostrado na Figura 3.8. Para  $\gamma \simeq 0,26$ , as trajetórias iniciadas na ilha de período 4 convergem para  $x = \pm 0,32$  enquanto que as iniciadas na ilha de período 1 convergem para  $x = \pm 0,5$ , de acordo com a Figura 3.10(c). Ao aumentar a dissipação para  $\gamma = 0,27$ , tanto as trajetórias iniciadas nas ilhas de período 4 como as iniciadas na ilha de período 1, convergem para  $x = \pm 0,5$ , como pode-se observar na Figura 3.10(d).

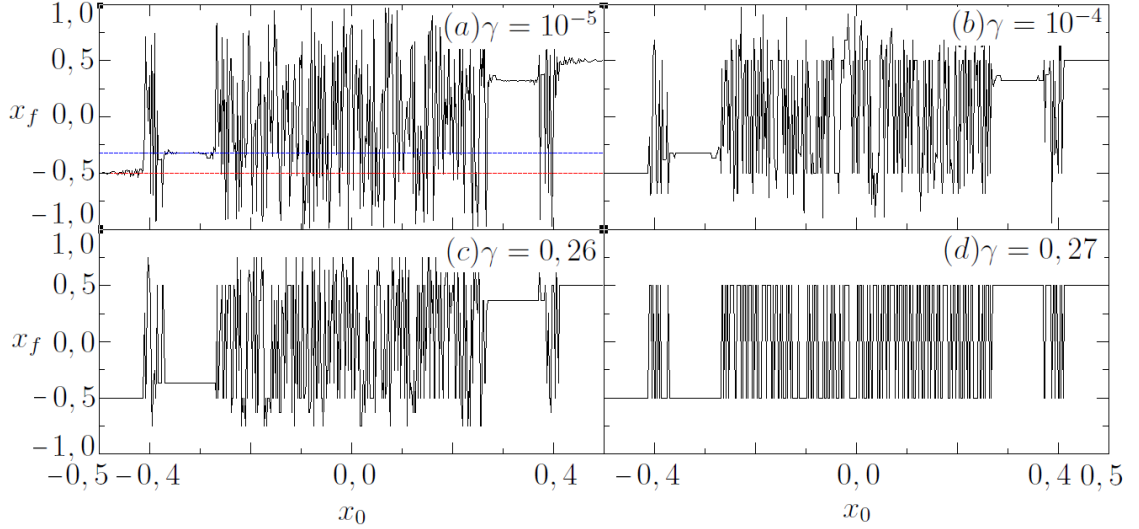


Figura 3.10: *Convergência da posição final,  $x_f$ , em função da posição inicial,  $x_0$ , com 4 diferentes valores de  $\gamma$ . Na Figura (a), a linha vermelha está no ponto  $x = -0,5$  (centro da ilha de período 1) enquanto que a linha azul está no ponto  $x = -0,32$  (centro de uma das 4 ilhas de período 4). Para todos os casos,  $p_0 = 0,0$  e  $k = 2,5$ . Estas figuras foram geradas com  $10^4$  iteradas.*

### 3.4 Expoente de Lyapunov a Tempos Finitos

Se duas trajetórias, de um sistema dinâmico dissipativo, são iniciadas próximas uma da outra, de maneira que ambas pertençam à mesma bacia de atração, é natural que haja convergência para o mesmo atrator. Porém, como certas condições iniciais convergem mais rapidamente que outras, é comum parar a dinâmica (parar as iteradas) em algum ponto da coordenada temporal de forma a ser possível diferenciar as

trajetórias. Com isto, ao se estudar divergência de trajetórias próximas, utiliza-se o Exponente de Lyapunov a Tempos Finitos (ELTF) que, nesta tese, é feito com a utilização da técnica de Reortonormalização de Gram-Schmidt (RGS) [12].

É conhecido que o expoente de Lyapunov  $\lambda$  é negativo quando duas trajetórias se aproximam exponencialmente o que faz com que ambas sejam convergentes para um mesmo atrator periódico.  $\lambda$  é positivo quando calculado em atratores caóticos e nulo quando há efeitos de bifurcações ou nos casos em que não há convergência nem divergência entre as trajetórias [32].

Para duas trajetórias iniciadas próximas uma da outra em uma região regular do espaço de fases, o tempo para que haja a convergência de  $\lambda$  é diferente, como pode ser visto na Figura 3.11 em que  $\lambda$  é ligeiramente menor para a órbita iniciada em  $x_0 = -0,315$  do que  $x_0 = -0,310$  para um mesmo tempo. Esta figura, que foi construída com  $\gamma = 0$ , mostra que quanto mais próximo do ponto de ressonância da ilha (centro),  $\lambda$  converge para zero mais rapidamente. A linha vertical em  $n = 10^4$  (10 mil iteradas) mostra esta diferença.

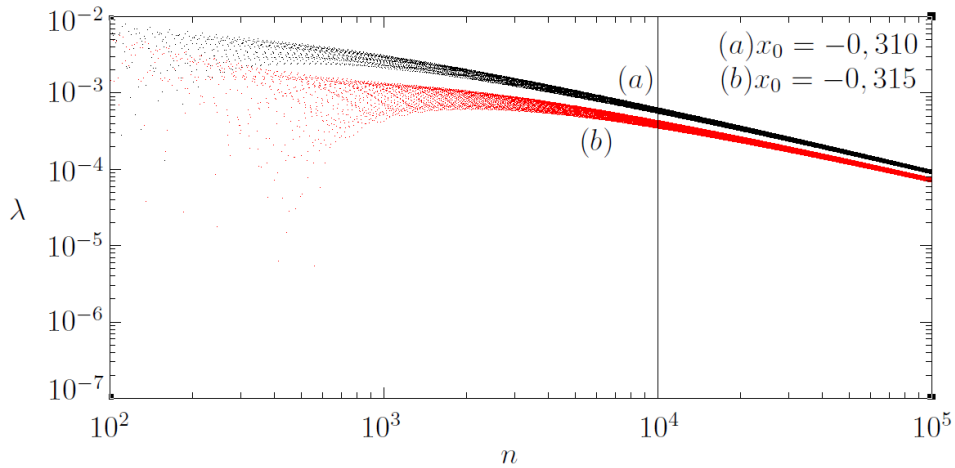


Figura 3.11: *Convergência para zero do expoente de Lyapunov em função do tempo para duas condições iniciais  $(x_0, p_0)$  diferentes, porém, ambas com  $\gamma = 0,0$ . Verifica-se para trajetórias iniciadas nas ilhas regulares que, para pontos mais próximos do centro, o expoente de Lyapunov converge mais rapidamente a zero. A curva (a) foi reproduzida com condição inicial em  $x_0 = -0,31$  enquanto que a curva (b) em  $x_0 = -0,315$ . Para ambas,  $p_0 = 0,0$ . O centro da ilha está no ponto  $(x, p) = (-0,32; 0,0)$ .*

O comportamento de  $\lambda$  também é analisado com a introdução do termo de dis-



sipação  $\gamma$  no mapa padrão. A Figura 3.12 apresenta  $\lambda$  em função do tempo para 3 (três) diferentes  $\gamma$ 's porém, com mesma condição inicial  $(x_0, p_0) = (-0, 31; 0, 0)$ . A curva (a) não apresenta dissipação e  $\lambda$  tende a zero por estar em uma região regular no espaço de fases enquanto que a curva (b) ao possuir dissipação pequena,  $\gamma = 10^{-4}$ ,  $\lambda$  converge a valores próximos de zero mais rapidamente que o caso conservativo de forma a atingir valores negativos em tempos longos. A curva (c) com dissipação um pouco maior,  $\gamma = 10^{-3}$ , atinge mais rapidamente a valores negativos. Os valores negativos de  $\lambda$  deve-se ao fato da trajetória se direcionar para algum atrator no espaço de fases.

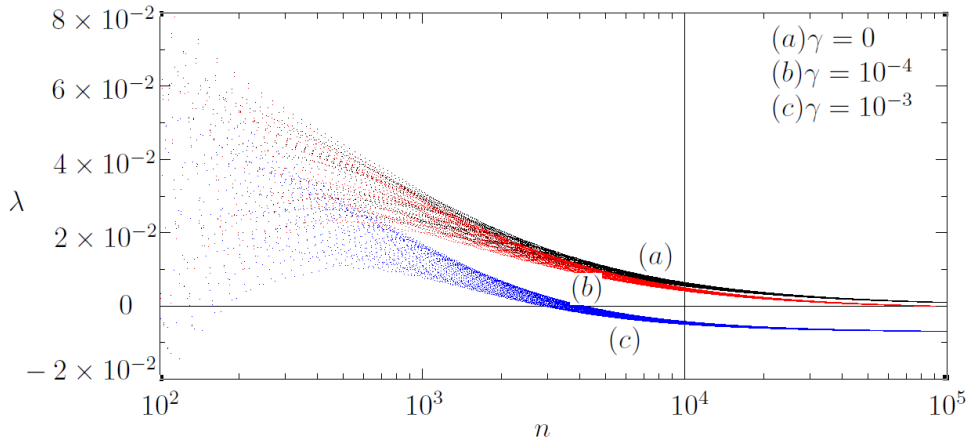


Figura 3.12: *Convergência do expoente de Lyapunov em função do tempo para diferentes  $\gamma$ 's. Quanto maior  $\gamma$ ,  $\lambda$  diminui mais rapidamente. Na linha-(a)  $\gamma = 0, 0$ , na linha-(b)  $\gamma = 10^{-4}$  e na linha-(c)  $\gamma = 10^{-3}$ . Para todos os casos,  $(x_0, p_0) = (-0, 31; 0, 0)$  e  $k = 2, 5$ .*

Nos estudos sobre a duplicação de período (bifurcação em cascata) em sistemas bidimensionais, Manchein e Beims, em 2013 [13], mostraram um diagrama de bifurcação para o mapa padrão conservativo, que é reproduzido com a Figura 3.13. Esta figura mostra o comportamento de  $\lambda$ , quantificado na barra colorida, em função do parâmetro  $k$  e da condição inicial  $x_0$ . Neste caso, fixou-se  $p_0 = 0, 0$  e o número de iterações foi de  $10^4$ . Todas as figuras construídas neste capítulo para o mapa padrão, utilizaram-se do parâmetro  $k = 2, 5$ , então, a partir da linha escura na Figura 3.13 para este valor de  $k$  pode-se fazer uma comparação com a Figura 3.1. Ao seguir a linha  $k = 2, 5$  verifica-se que  $\lambda$  é nitidamente nulo (preto na figura) em 4 situações: em  $x_0 = \{-0, 50; -0, 32; 0, 32; 0, 50\}$ . Ao comparar-se com o espaço de fases da Figura 3.1



na linha  $p = 0,0$ , observa-se que estas regiões são exatamente os pontos ressonantes, ou seja, centros das regiões de órbitas regulares. As regiões com valores de  $\lambda$  positivos mas, muito próximos de zero, representadas em vermelho na Figura 3.13, compreendem as órbitas regulares compostas por torus racionais/irracionais. É possível observar nesta figura o efeito de  $\lambda$  ser mais próximo de zero quanto mais próximo do centro das órbitas periódicas. Isto é verificado com o fato dos escurecimentos das regiões regulares serem sempre na direção das bordas das ilhas para os centros. Os pontos em verde e azul representam as regiões caóticas. Ainda nesta figura, verifica-se que as ilhas de período 4 pertencem à ilha de período 1 para perturbações até  $k \sim 2,2$ . Ou seja, conforme previsto na literatura, com o aumento da perturbação, os torus mais externos das ilhas regulares tendem a ser quebrados, o que dará origem a novas ilhas.

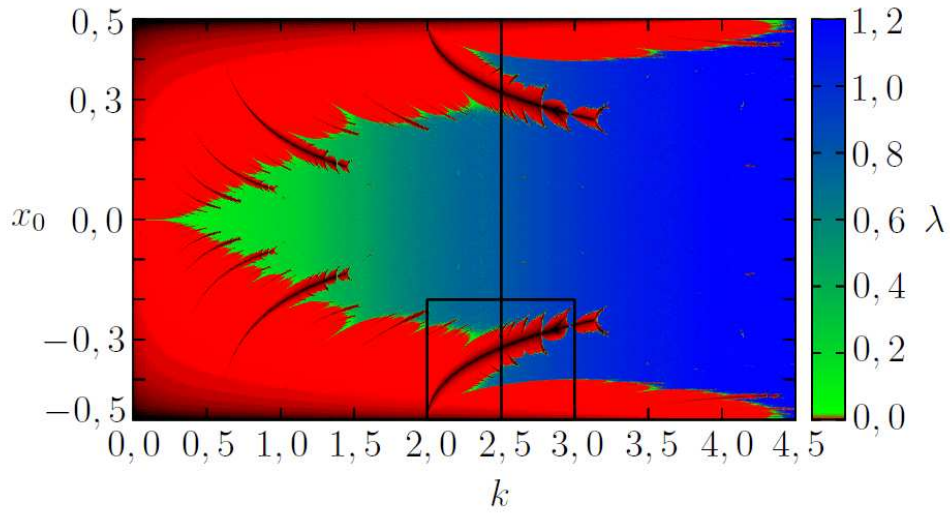


Figura 3.13: *Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função de  $k$  e  $x_0$  para o mapa padrão conservativo. Como condição inicial, foi utilizado  $p_0 = 0,0$ . Esta figura é uma reprodução do trabalho de C. Manchein e M. Beims [13].*

Na Figura 3.1, ao longo de  $p = 0,36$  em todo  $x$ , é possível observar a formação de apenas uma região regular com centro em  $x = -0,32$ . Então, ao observar a Figura 3.14 na linha  $k = 2,5$ , verifica-se apenas uma região com  $\lambda$  significativamente próximo de zero (vermelho) com centro em  $x = -0,32$ .

As Figuras 3.13 e 3.14 são capazes de fornecer informações sobre a formação das ilhas regulares em função do parâmetro  $k$  do mapa padrão que representa, além da intensidade de um pulso periódico num pêndulo, um termo de não-linearidade capaz

de destruir curvas invariantes dando origem à formação de stickiness e, consequentemente, ilhas periódicas em torno da ilha principal. Estas figuras mostram que as curvas invariantes das ilhas secundárias podem ser destruídas formando ilhas de ordem maior, como as terciárias e assim por diante. Pode-se formar ilhas em toda ordem, o que indica uma característica fractal em suas formações.

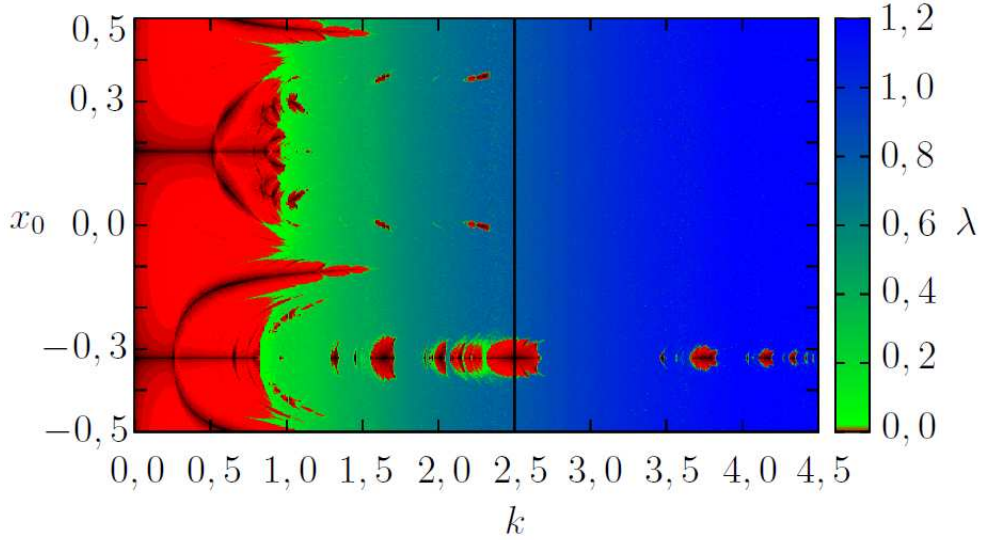


Figura 3.14: *Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função de  $k$  e  $x_0$  para o mapa padrão conservativo. Para construção da figura, foi utilizado condição inicial  $p_0 = 0,36$ .*

De volta para a condição  $p_0 = 0$ , verifica-se que dependendo de como for o uso de  $\gamma$ ,  $\lambda$  é modificado. A Figura 3.15 mostra o comportamento de  $\lambda$  em duas diferentes dissipações,  $\gamma = 10^{-4}$  e  $\gamma = 10^{-3}$ . Os valores de  $\gamma$  são os mesmos casos dissipativos utilizados na Figura 3.12 e valores de  $k$  e  $x_0$  são os da região limitada pelo retângulo em destaque na Figura 3.13. Os efeitos sobre  $\lambda$  ao utilizar-se  $\gamma = 10^{-4}$  estão apresentados na Figura 3.15(a), que indica a tendência de  $\lambda$  convergir mais rapidamente para zero ao ser comparado com a condição conservativa. Isto é verificado por um leve escurecimento nas regiões em vermelho, próximas das linhas escuras, em que  $\lambda$  se aproxima de zero mais rápido que o caso conservativo. Quando  $\gamma = 10^{-3}$ , Figura 3.15(b), este efeito fica mais nítido e é possível verificar que nas regiões regulares (em vermelho na Figura 3.13)  $\lambda$  converge mais rapidamente para zero, o que deixa a figura mais escura. Este efeito é o mesmo mostrado na Figura 3.12.

Outra análise que pode ser feita é observar como  $\lambda$  se comporta em função de  $\gamma$

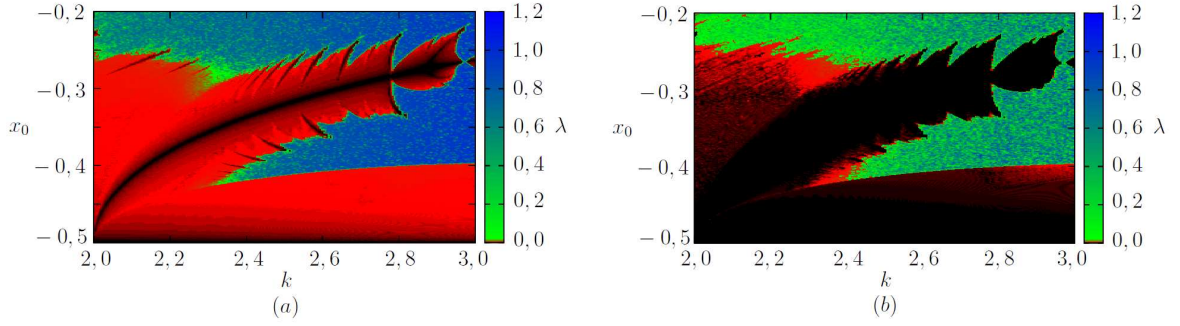


Figura 3.15: *Expoente de Lyapunov,  $\lambda$ , em função de  $k$  e  $x_0$  com dissipação (a)  $\gamma = 10^{-4}$  e (b)  $\gamma = 10^{-3}$ . Para construção da figura, foi utilizado condição inicial  $p_0 = 0, 0$ .*

para uma única condição inicial. Na Figura 3.16 o ponto inicial foi o mesmo utilizado anteriormente na visualização da Figura 3.8,  $(x_0; p_0) = (-0, 31; 0, 0)$ . Na Figura 3.16, percebe-se que para baixa dissipação, o valor de  $\lambda$  é muito próximo de zero, o que já era esperado ao considerar que o ponto inicial está em uma região de órbitas regulares. Conforme aumenta-se a dissipação,  $\lambda$  se torna cada vez mais negativo, como previsto na Figura 3.12, até que a dissipação se aproxime de  $\gamma = 0, 26$ , em que  $\lambda$  possui um pico de valor nulo, como mostrado na Figura 3.16. Este valor de  $\gamma$  é exatamente a dissipação da Figura 3.8 que ocorreu o “salto” das trajetórias que deixaram repentinamente de serem atraídas para o centro dos torus de período 4 e atraíram-se para os torus de período 1.

Pode-se reforçar a validade das discussões realizadas até então ao calcular  $\lambda$  para diferentes situações, como pode ser visto na Figura 3.17 que mostra os mesmos efeitos dos casos conservativos, como o mostrado na Figura 3.13, no que diz respeito ao comportamento de  $\lambda$  porém, em função de  $k$  e  $p_0$  no caso em que a condição inicial sempre nula é a da posição,  $x_0 = 0, 0$ .

### 3.5 Convergência de Trajetórias

Em mapas conservativos bidimensionais, uma trajetória iniciada em uma região caótica tem a liberdade de percorrer qualquer ponto desta região desde que não se cruze através das linhas regulares e mantém constante o volume do espaço de fases. Em mapas dissipativos, tanto as trajetórias pertencentes às regiões regulares quanto as caóticas sofrem atração por pontos/regiões e contraem o volume do espaço de fases.

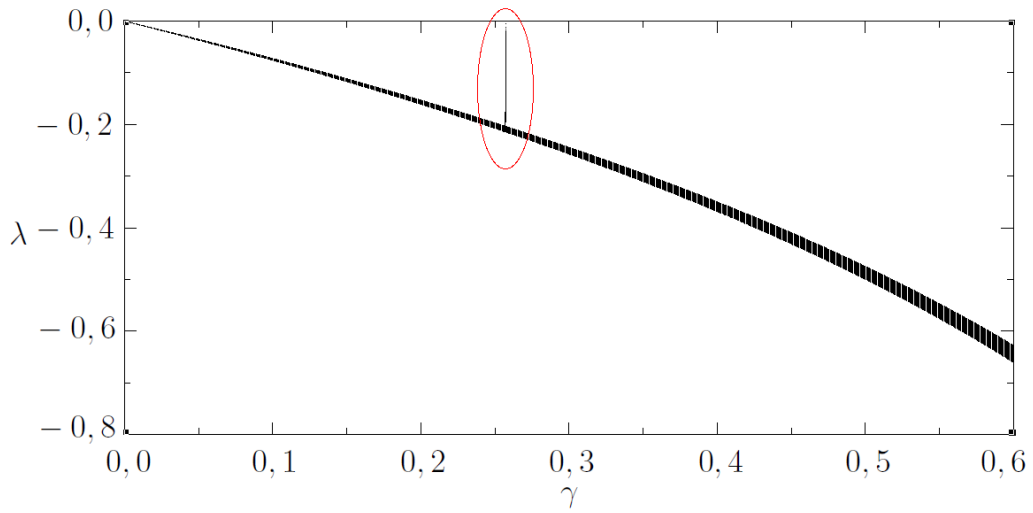


Figura 3.16: A figura mostra o comportamento do expoente de Lyapunov em função da dissipação  $\gamma$ . As condições iniciais utilizadas foram:  $(x_0; p_0) = (-0,31; 0,0)$  e  $k = 2,5$ .

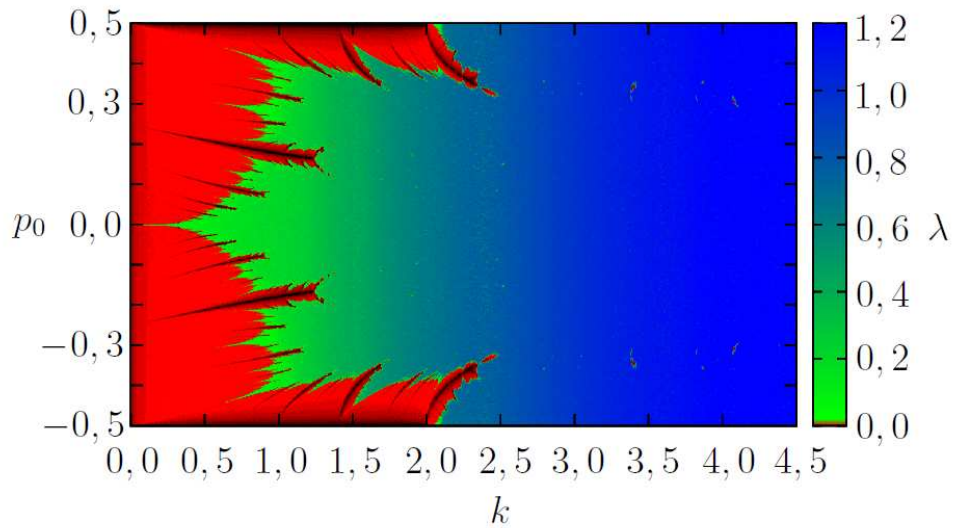


Figura 3.17: Expoente de Lyapunov em função do parâmetro  $k$  e da condição inicial  $p_0$  para o mapa padrão conservativo. Para construção da figura, foi utilizado condição inicial  $x_0 = 0,0$ .

Os atratores são diferentes dependendo de quais são as condições iniciais escolhidas na posição, momentum, intensidade dos pulsos periódicos e parâmetro de dissipação.

Pode-se obter uma figura que permite obter uma visão geral sobre como as trajetórias do mapa padrão conservativo percorrem o espaço de fases ao serem iniciadas em uma linha  $p_0 = 0,0$  no intervalo  $[-0,5 < x_0 < 0,5]$  para vários valores de  $k$ . Após  $10^4$  iteradas, é construída a Figura 3.18 que mostra, através das barra de cores, o ponto final das trajetórias em função das diferentes condições iniciais  $k$  e  $x_0$ . Ao comparar esta figura com a Figura 3.1, verifica-se na linha  $k = 2,5$  que as as trajetórias iniciadas nas regiões regulares permanecem nestas regiões, como mostrado nas proximidades de  $x_0 \approx \pm 0,5$  e  $\pm 0,3$ .

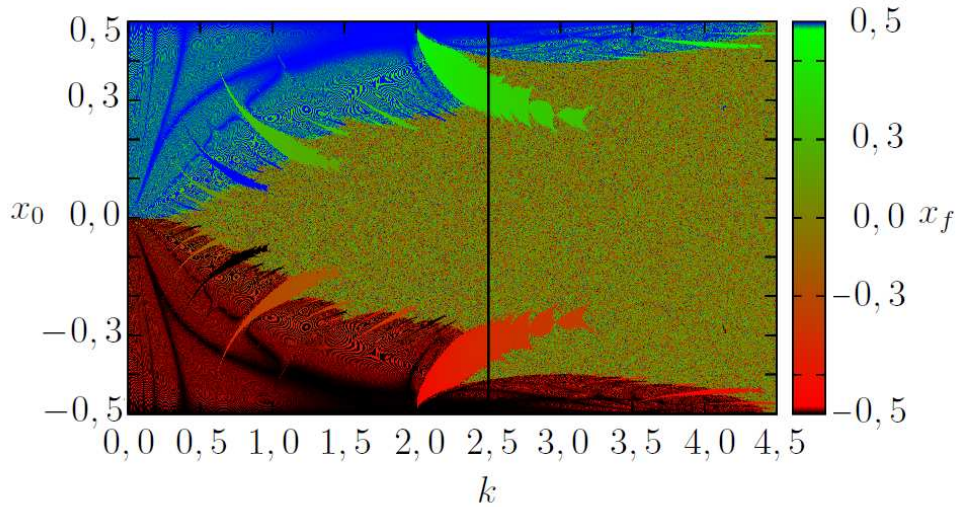


Figura 3.18: *Pontos finais (barra colorida) das trajetórias do mapa padrão conservativo em função da coordenada  $x_0$  e do parâmetro  $k$ . A linha escura está em  $k = 2,5$  e a figura foi gerada após  $10^4$  iteradas.*

Para o mapa padrão dissipativo, pode-se fazer uma análise sobre quais serão os pontos de convergência das trajetórias iniciadas na linha de condições iniciais da Figura 3.1 ( $p_0 = 0$  e  $[-0,5 < x_0 < 0,5]$ ). Observa-se, primeiramente, a posição final  $x_f$  (barra colorida) em função da condição inicial  $x_0$  e do parâmetro de dissipação  $\gamma$  (Figura 3.19). Nesta figura, para baixos valores de  $\gamma$ , as trajetórias iniciadas nas regiões regulares permanecem nestas regiões, como podem ser vistas nas proximidades de  $x_0 \approx \pm 0,5$  e  $\pm 0,3$ , enquanto que, as iniciadas nas regiões caóticas permanecem nas regiões caóticas preenchendo todo espaço de fases oscilando para  $\pm(x, p)$  aleatoriamente. Este efeito é observado até  $\gamma \sim 0,25$ , em que todas as trajetórias são atraídas para ilha regular de período 1, cujo centro posiciona-se no ponto  $(x, p) = (\pm 0,5; 0,0)$ .

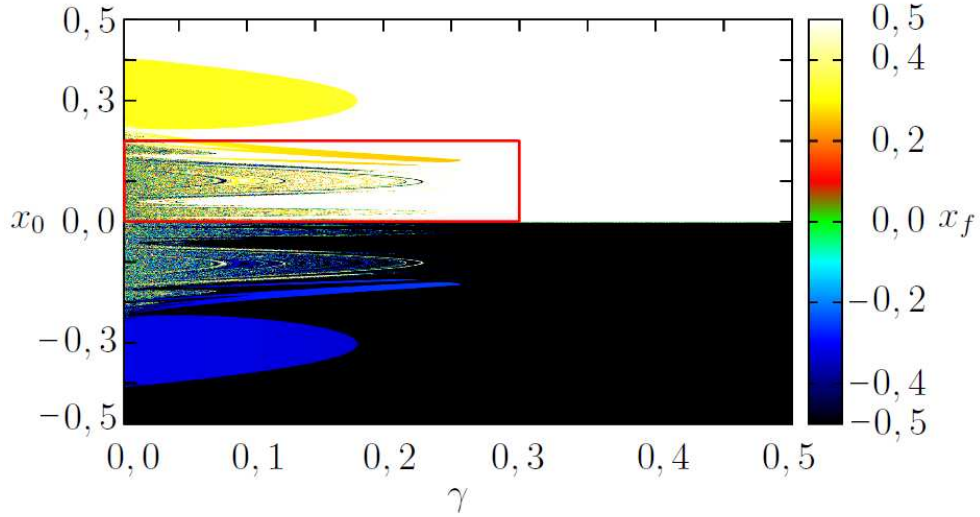


Figura 3.19: *Posição final das trajetórias do mapa padrão em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $x_0$ . Como condições iniciais foram utilizados  $p_0 = 0, 0$ ,  $[-0, 5 < x_0 < 0, 5]$  e  $k = 2, 5$ .*

Uma ampliação da Figura 3.19 (região em destaque), sobre a convergência das trajetórias iniciadas nas regiões caóticas, pode ser vista na Figura 3.20 em que as trajetórias percorrem todo espaço de fases para baixos  $\gamma$ 's e são atraídas para os atratores das regiões regulares (cores preta e branca) conforme aumenta-se  $\gamma$ .

A Figura 3.21 compara as posições das trajetórias mostradas nas Figuras 3.19 e 3.20 com o retrato de fases do mapa padrão conservativo descrito na Figura 3.1. A linha vermelha entre as Figuras 3.21 superior e inferior, que compreende  $p = 0$  e  $[-0, 5 < x_0 < 0, 5]$ , representa o conjunto de condições iniciais utilizadas para construção da Figura 3.19.

A partir da Figura 3.21, é possível fazer uma análise das regiões limites entre as trajetórias regulares e caóticas para entender como ocorrem as variações de atratores para baixos valores de  $\gamma$ . Primeiramente, faz-se uma ampliação da região em destaque da Figura 3.21 em  $x \sim -0, 4$  e  $(1 - \gamma) \sim 1$ , como exemplificado na Figura 3.22. Esta figura traz os pontos de convergência finais das trajetórias com a respectiva região do espaço de fases em que foram dadas as condições iniciais, ou seja,  $p_0 = 0$  e  $[-0, 5 < x_0 < 0, 5]$ . Esta última figura indica que as trajetórias iniciadas nas regiões regulares permanecem nas regiões regulares. Este efeito é explicado pela região de cor preta da figura inferior. As trajetórias iniciadas em regiões caóticas próximas das regulares, são



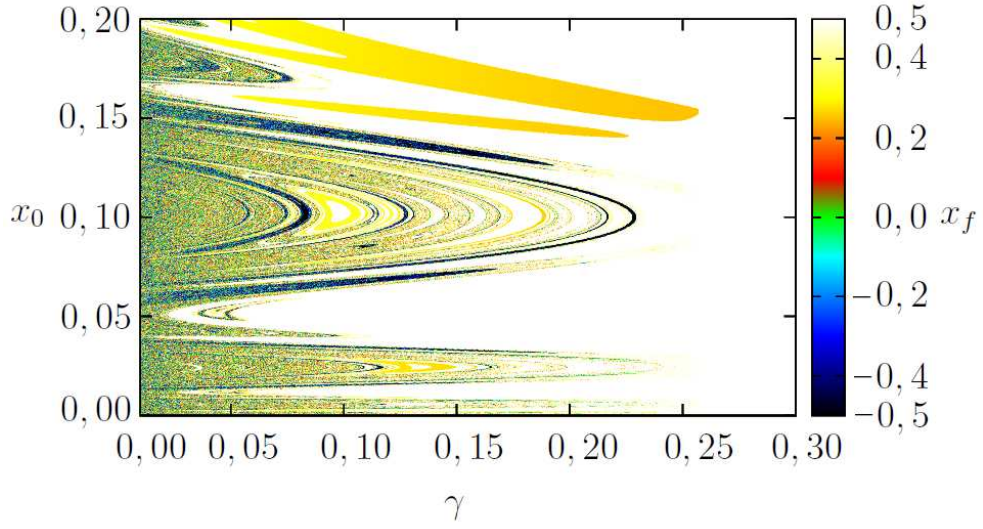


Figura 3.20: Ampliação da posição final das trajetórias do mapa padrão em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $x_0$ . Como condições iniciais foram utilizados  $p_0 = 0, 0$ ,  $[-0, 5 < x_0 < 0, 5]$  e  $k = 2, 5$ .

livres para percorrer o espaço de fases em baixos  $\gamma$ , porém, são atraídas cada vez mais pelas regulares, conforme aumenta-se  $\gamma$ . Como exemplo, é possível ampliar a região em destaque pelo retângulo vermelho esquerdo da Figura 3.22 inferior e construir a Figura 3.23. Nesta figura, uma trajetória iniciada nas proximidades do ponto  $x_0 \sim -0,415$ , cor preta na barra de cores, mantém-se na cor preta, o que indica estar na região regular cujo centro está em  $x = -0,5$ . Para o caso de uma trajetória iniciada próxima da posição caótica  $x_0 \sim -0,410$ , há liberdade para percorrer todo espaço de fases (cores variadas) enquanto  $\gamma \sim 0$  mas converge para  $x \sim -0,5$  (cor preta) quando  $(1 - \gamma) \sim 0,99$ . Esta figura mostra que, quanto mais distante de uma determinada região regular, maior deve ser o valor de  $\gamma$  para que haja convergência para esta região.

Para trajetórias iniciadas em regiões regulares com altos períodos, há convergências distintas para diferentes  $\gamma$ 's. Como exemplo, a Figura 3.24 é uma ampliação da região retangular destacada do lado direito da Figura 3.22 inferior. Uma trajetória iniciada em uma região regular, no ponto  $x_0 = -0,378$ , mantém-se nesta região, de acordo com a tabela de cores, até  $(1 - \gamma) \sim 0,995$ . Conforme aumenta-se  $\gamma$ , a trajetória passa a convergir para  $x \sim -0,32$ , que é o centro de uma região regular de período 4 no espaço de fases. Este efeito indica uma possível sequência de convergências das trajetórias

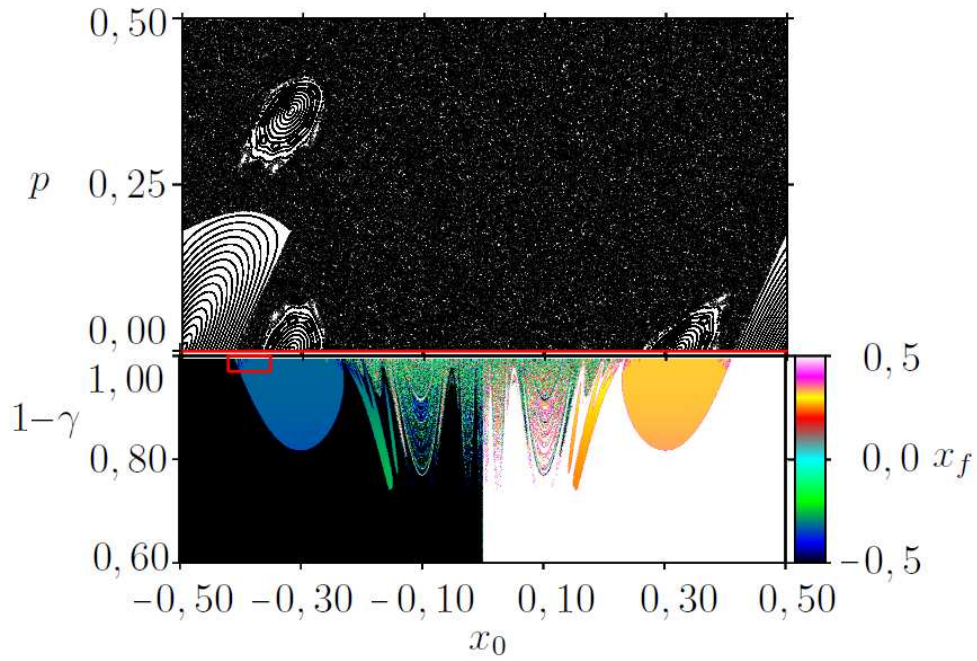


Figura 3.21: *Comparativo entre a posição final das trajetórias do mapa padrão em, função dos parâmetros  $\gamma$  e  $x_0$  (figura inferior), com parte do retrato de fases (figura superior) do mapa padrão conservativo. As condições iniciais estão representadas pela linha vermelha (figura superior) que compreende  $p_0 = 0,0$  e  $\{-0,5 < x_0 < 0,5\}$ . A figura foi construída com  $k = 2,5$ .*

iniciadas em regiões regulares com períodos de maior ordem para menor.

### 3.6 Hierarquias

A Seção 3.5 mostra que as trajetórias iniciadas nas regiões regulares trocam de atratores conforme aumenta-se  $\gamma$  e que, essas trocas são, em sua maioria, a partir dos atratores existentes nas regiões ressonantes de maior ordem para menor. Uma vez que as análises são feitas nas órbitas estáveis, os ELTFs são negativos e, portanto, nas bifurcações, tendem a zero. Nas instabilidades, os ELTFs podem tornar-se positivos. A Seção 3.4 mostra que, quando uma trajetória troca de atrator, o expoente de Lyapunov possui um pico no exato instante da troca o que indica instabilidade do atrator. Com base nestas informações, pode-se investigar como deve ocorrer a sequência de atrações



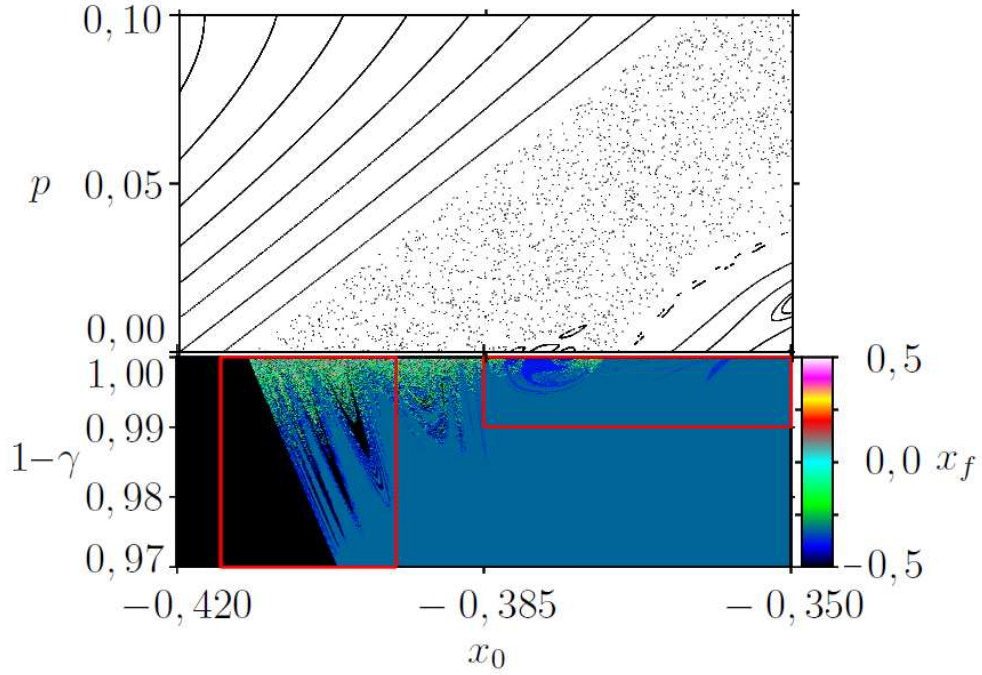


Figura 3.22: *Ampliação de uma pequena região delimitada pela região em destaque da Figura 3.21, do comparativo entre a posição final das trajetórias do mapa padrão dissipativo, em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $x_0$  (figura inferior), com o retrato de fases (figura superior) do mapa padrão conservativo.*

para trajetórias iniciadas em regiões de diferentes períodos.

A Figura 3.25 é uma ampliação da ilha de período 4 em destaque na Figura 3.1. As linhas contínuas que circundam o ponto central,  $(x; p) = (-0, 32; 0, 36)$ , são os torus racionais/irracionais. Como pode ser visto na Figura 2.4(c), trajetórias próximas de pontos ressonante de ordem maior formam pequenas ilhas circundando estes pontos, o que explica o aparecimento de círculos de diferentes períodos em volta do ponto central da ilha da Figura 3.25 como, por exemplo, os 7 círculos maiores. Uma vez que esta ilha possui o ponto ressonante central com período 4, os 7 círculos citados formam um toro de período 28, o qual será utilizada a notação “período  $7 \times 4$ ” a fim de representar que são 7 períodos em cada uma das 4 ilhas.

Ao fazer uma ampliação da região em destaque da Figura 3.25, observa-se mais estruturas ressonantes com diferentes períodos (per- $24 \times 4$ ,  $11 \times 4$  etc), que podem ser vistas com mais detalhes na Figura 3.26 e, a partir desta, faz-se os estudos de

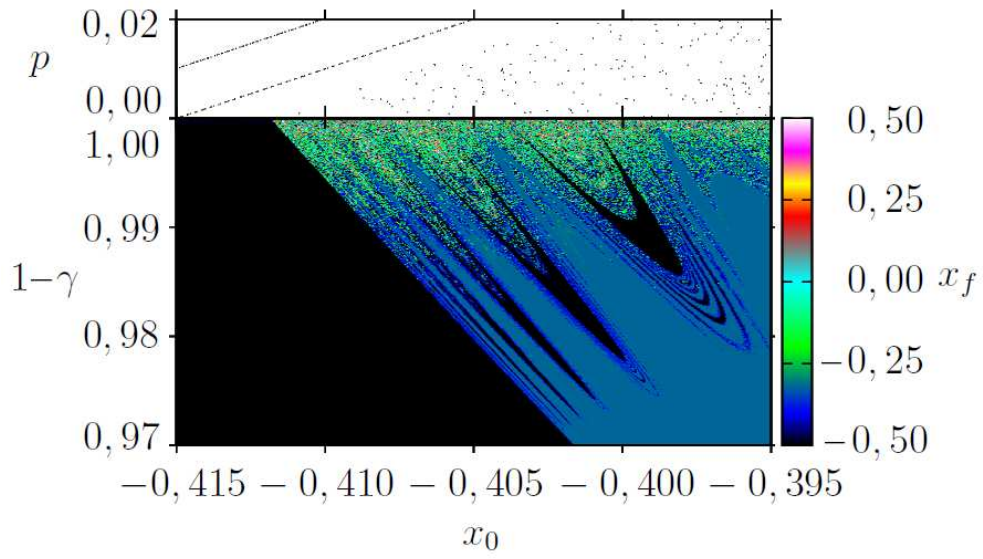


Figura 3.23: Ampliação da região em destaque posicionada à esquerda da Figura 3.22 inferior.

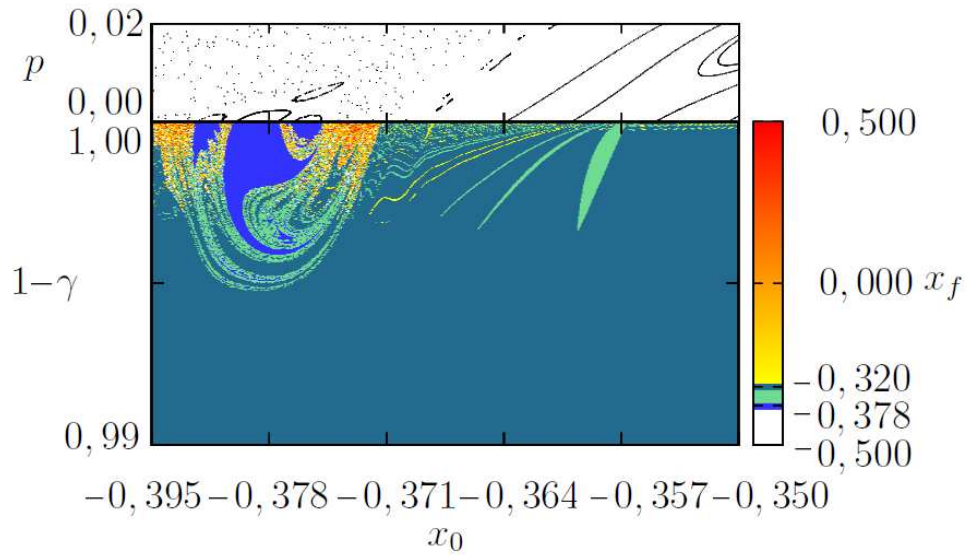


Figura 3.24: Ampliação da região em destaque posicionada à direita da Figura 3.22 inferior.

como as trajetórias iniciadas em diferentes períodos, buscam seus respectivos atratores conforme altera-se os  $\gamma$ 's.

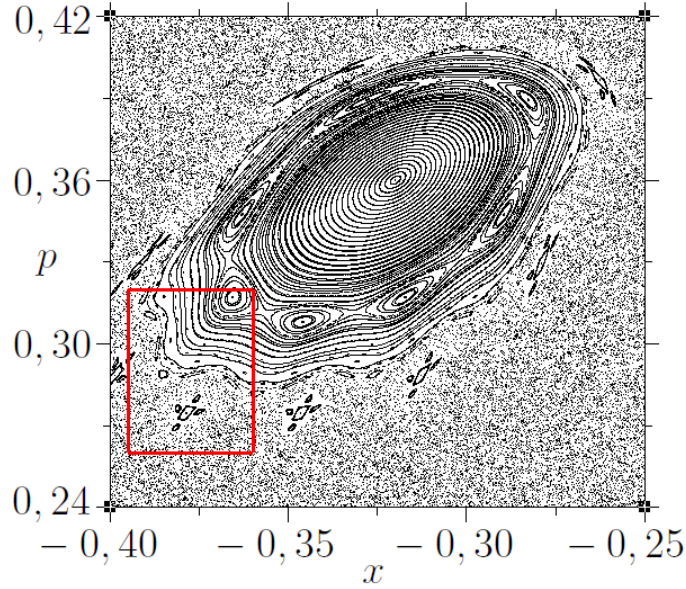


Figura 3.25: Ampliação da região em destaque da Figura 3.1.

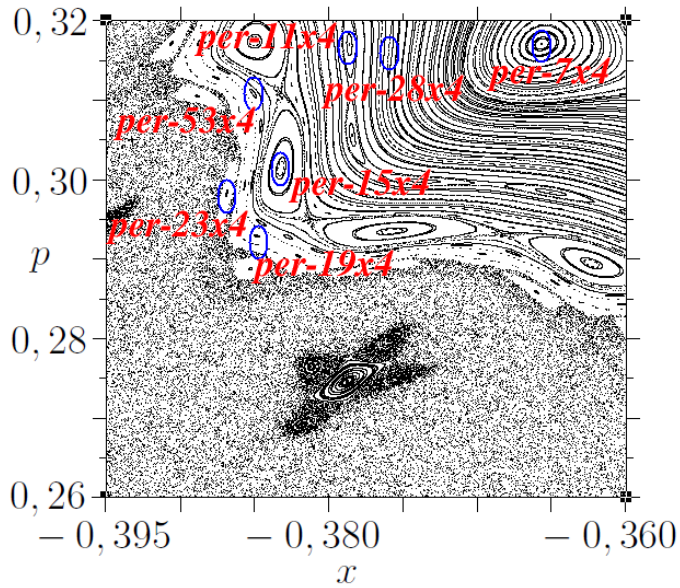


Figura 3.26: Ampliação da região em destaque da Figura 3.25.

Uma trajetória, de um sistema dinâmico conservativo, iniciada num ponto de período  $7 \times 4$  (Figura 3.26) deve apresentar 7 soluções na região que compreende a ilha. Isto pode ser visto para uma trajetória de condição inicial  $(x_0; p_0) = (-0,365650; 0,317050)$  cujas soluções são apresentadas na Figura 3.27(superior). Quando a dissipação é con-

siderada, as soluções sofrem alterações mas são estáveis mantendo-se o período. A partir  $\gamma \simeq 0,0033951$ , perde-se a estabilidade e as trajetórias convergem para o ponto  $x \sim -0,32$ , que corresponde ao centro da ilha de período 4. Esta instabilidade é confirmada com o cálculo do respectivo expoente de Lyapunov  $\lambda$  que possui um pico no instante da transição do período  $7 \times 4$  para  $1 \times 4$  Figura 3.27(inferior).

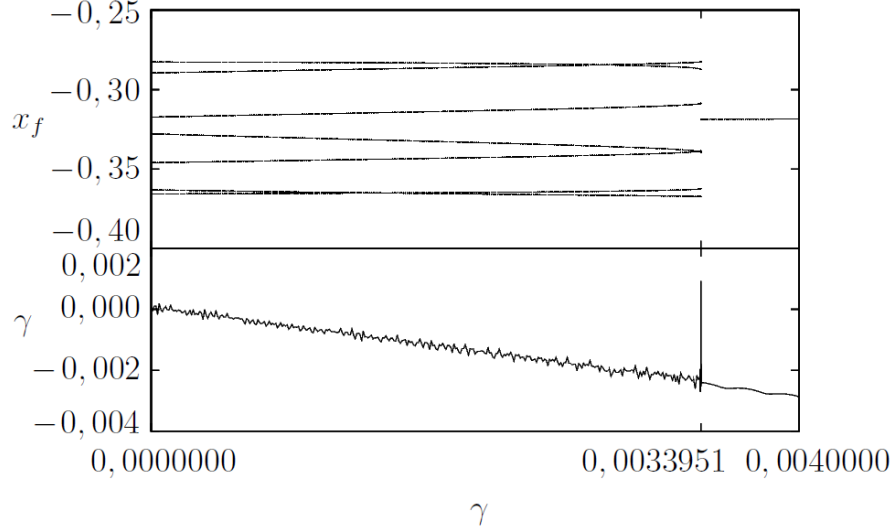


Figura 3.27: *Transição da órbita de período  $7 \times 4$  para  $1 \times 4$ .*

De acordo com a Figura 3.8, uma trajetória iniciada nas proximidades do centro da ilha de período 4 sofre instabilidade quando  $\gamma \simeq 0,26$ . Então, para as órbitas de período  $7 \times 4$ , as trajetórias sofrem duas instabilidades. A primeira ao passar do período  $7 \times 4$  para período  $1 \times 4$ , com  $\gamma \simeq 0,0033951$  (Figura 3.27) e, a segunda, ao passar do período  $1 \times 4$  para período 1, com  $\gamma \simeq 0,26$  (Figura 3.8). Com isto, verifica-se uma hierarquia na sequência em que ocorrem as instabilidades com as respectivas trocas de atratores. Esta aparente hierarquia na convergência das trajetórias aos atratores é iniciada em algum ponto ressonante de ordem maior que outro.

Como exemplo, considera-se  $(x_0; p_0) = (-0,386885; 0,298300)$  como ponto inicial de uma trajetória. O período para  $\gamma = 0$  (conservativo) é  $23 \times 4$ , como observa-se na Figura 3.26. Conforme aumenta-se o valor de  $\gamma$ , as órbitas sofrem alterações até que, em  $\gamma \simeq 0,0003347$ , ocorre a primeira instabilidade, o que produz um pico positivo no valor de  $\lambda$  e reduz o período para  $7 \times 4$ , como pode ser visto na Figura 3.27. Ainda nesta figura, observa-se outro ponto de instabilidade em  $\gamma \simeq 0,0033951$ , que reduz o

período para  $1 \times 4$ . Ao utilizar-se do fato de que o período é reduzido para 1 quando  $\gamma \simeq 0,25$ , pode-se afirmar que a trajetória sofre o terceiro processo de instabilidade (Figura 3.8), e verifica-se a hierarquia.

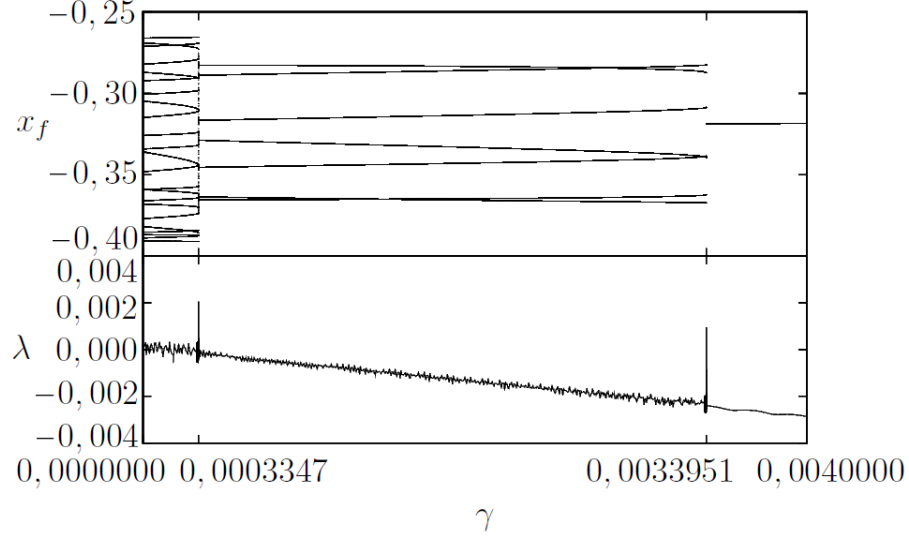


Figura 3.28: *Transição da órbita de período  $23 \times 4$  para  $7 \times 4$  e, em seguida, para  $1 \times 4$ .*

Para outros casos descritos na Figura 3.26, é possível organizar em uma tabela, quais são os valores da dissipação  $\gamma$  necessários para que ocorram as transições de período (Tabela 3.1). Esta tabela tem por objetivo mostrar a sequência de  $\gamma$ 's nas transições entre os períodos quando comparadas as ressonâncias de períodos maiores que 4 como, por exemplo, a citada acima em que uma trajetória que parte do ponto ressonante de período  $7 \times 4$  sofre instabilidade e transforma-se em período  $1 \times 4$ . Após isto, sofre nova instabilidade e adquire período 1. Outro exemplo, uma trajetória com início em um ponto ressonante de período  $23 \times 4$  sofre instabilidade transformando-se em período  $7 \times 4$ . Na sequência, transformar-se em período  $1 \times 4$  e, por último, período 1.

A Tabela 3.1 não permite detectar uma possível regra de transição a partir dos períodos. Por exemplo, não se tem uma regra bem definida para saber a razão pela qual uma trajetória com período  $19 \times 4$  transforma-se em período  $1 \times 4$  com menor  $\gamma$  do que uma de período  $11 \times 4$  transforma-se em período  $1 \times 4$ . Ou então, uma relação entre os diferentes  $\gamma$ 's quando comparados aos respectivos períodos:  $7 \times 4$ ,  $11 \times 4$ ,  $15 \times 4$ ,  $19 \times 4$  etc.

Tabela 3.1: *Tabela que relaciona o valor de  $\gamma$  necessário para cada transição de período.*

período inicial	$\gamma(\rightarrow 7 \times 4)$	$\gamma(\rightarrow 1 \times 4)$	$\gamma(\rightarrow 1)$
$7 \times 4$		$3,39510 \times 10^{-3}$	0,26
$11 \times 4$		$5,59700 \times 10^{-5}$	0,26
$15 \times 4$		$6,53795 \times 10^{-4}$	0,26
$19 \times 4$		$4,93020 \times 10^{-5}$	0,26
$23 \times 4$	$3,34770 \times 10^{-4}$	$3,39510 \times 10^{-3}$	0,26
$29 \times 4$		$7,24600 \times 10^{-6}$	0,26
$53 \times 4$		$1,42160 \times 10^{-5}$	0,26

### 3.7 Hiperbolicidade

A sequência hierárquica dos atratores das trajetórias dissipativas não pode ser obtida diretamente pelos  $\gamma$ 's da Tabela 3.1. As trajetórias, quando sujeitas a dissipação, tendem a convergir para certos atratores, como estudado na Seção 3.6. A dúvida consiste em saber se existe alguma razão mais profunda que faz com que as trajetórias decidam convergir para um ou para outro atrator. Para tentar responder este questionamento, serão utilizadas as informações obtidas dos vetores covariantes de Lyapunov.

As ideias e os resultados descritos a seguir (nesta Seção) foram motivados a partir dos estudos sobre hiperbolicidades [50, 51] que estão em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Sergio R. Lopes, deste departamento, e foram adquiridos em conjunto com este grupo.

O ângulo entre os vetores covariantes de Lyapunov expresso pela Equação (2.66) pode ser calculado em todo espaço de fases do mapa padrão. Como visto na Seção 2.7, este ângulo indica o *grau de hiperbolicidade* local.

Para melhor entendimento dos efeitos da hiperbolicidade  $\phi$  sobre as trajetórias dissipativas, pode-se considerar as regiões das bordas das ilhas regulares. A partir desta região, inicia-se trajetórias dissipativas em pontos hiperbólicos e não-hiperbólicos a fim de entender os diferentes efeitos.

Através de um estudo numérico, juntamente com a aluna Taline Krüger, foi possível determinar uma região hiperbólica,  $(x, p) \sim (-0,355; 0,280)$ , e outra não-



hiperbólica,  $(x, p) \sim (-0,343; 0,398)$ . Então, define-se um retângulo de lado  $r = 2 \times 10^{-3}$  em cada uma das duas regiões definidas acima e inicia-se  $10^3$  trajetórias, com  $\gamma = 10^{-3}$  e condições iniciais  $(x, p)$  aleatórias, dentro de cada retângulo. As trajetórias com início nas regiões não-hiperbólicas (indicado com um “×” de cor amarela na parte superior da ilha da Figura 3.29) percorrem todo espaço de fases antes de serem atraídas para o centro da ilha, como mostram as curvas de cor preta da Figura 3.29. A partir das condições iniciais hiperbólicas (indicado por um “×” de cor azul na parte inferior da ilha da mesma figura), as trajetórias são mais facilmente atraídas para o centro da ilha, como mostram as curvas de cor vermelha da mesma figura, sem dispersão para o restante do retrato de fases.

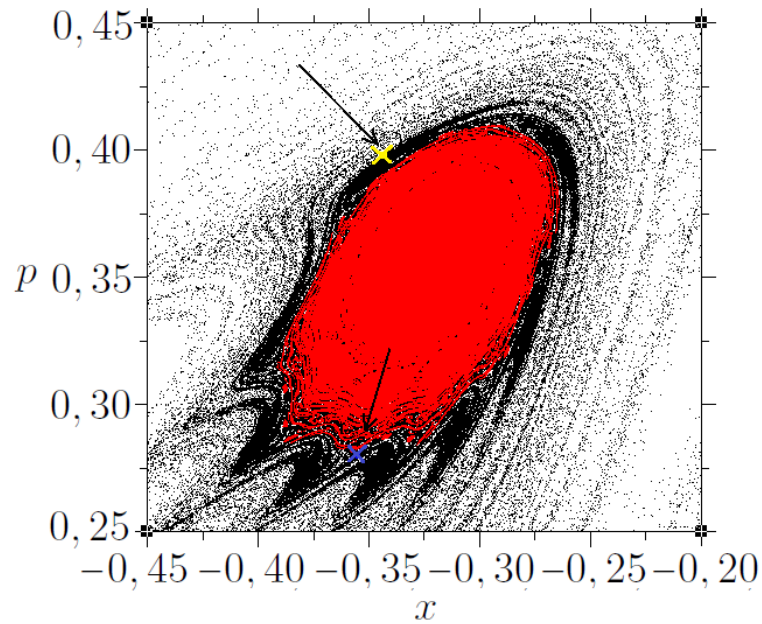


Figura 3.29: Ampliação do retrato de fases do mapa padrão para a ilha de período 4 em destaque na Figura 3.1 com duas regiões diferentes de condições iniciais com dissipação  $\gamma = 10^{-3}$ . Foram dadas  $10^3$  condições iniciais escolhidas em regiões não-hiperbólicas, em amarelo (superior) e,  $10^3$  condições iniciais nas regiões hiperbólicas, em azul (inferior).

Pode-se comparar as trajetórias iniciadas nas regiões hiperbólicas com as não-hiperbólicas em cada instante de suas evoluções. A Figura 3.30 mostra as posições das trajetórias conforme evoluem até o total de  $n = 10^4$  iteradas do mapa padrão para  $10^3$  condições iniciais não-hiperbólicas (curvas de cor preta) e  $10^3$  hiperbólicas

(curvas de cor vermelha). Esta figura mostra que as trajetórias iniciadas nas regiões não-hiperbólicas percorrem todo espaço de fases antes de serem atraídas para a ilha enquanto que, as hiperbólicas são atraídas com mais facilidade para os atratores da ilha sem que haja dispersão, confirmando o efeito visto na Figura 3.29. Este efeito dá indícios de possíveis existências de canais hiperbólicos que direcionam as trajetórias dissipativas a convergirem mais rapidamente para seus respectivos atratores.

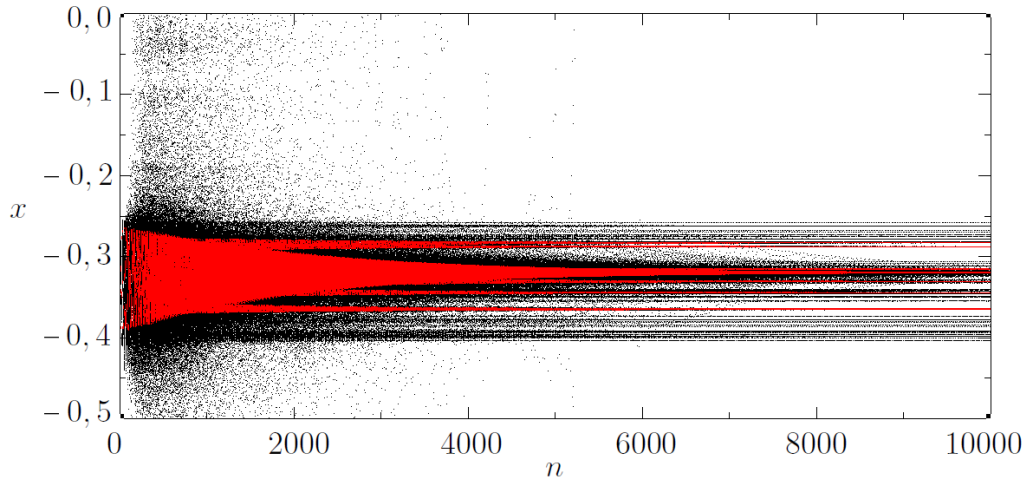


Figura 3.30: *Tempo  $\times$  posição para duas condições iniciais cuja dissipação é dada por  $\gamma = 10^{-3}$ . Em preto,  $10^3$  trajetórias com condições iniciais não-hiperbólicas e, em vermelho,  $10^3$  com condições iniciais hiperbólicas.*



## Capítulo 4

# Aplicação: Dissipação em um Sistema de Spins

Estruturas magnéticas em escalas nanométricas são promessas para futuras aplicações em elementos básicos de dispositivos nanoeletrônicos e são frequentemente discutidas no contexto dos processos de informações quânticas. O principal desafio das tecnologias de informações quânticas é achar um procedimento eficiente para geração e manipulação de estados emaranhados de *bits quânticos* [29]. Neste contexto, estudos promissores nesta área estão se baseando em uma Molécula Nanomagnética Simples (*MNS*), que são estruturas moleculares com uma grande quantidade de Spins. Um protótipo representativo desta família de componentes é o acetato  $Mn_{12}$  com  $S = 16$  (Ilustração na Figura 4.1). Estas moléculas nanomagnéticas mostram fenômenos que têm sido foco de pesquisas teóricas e experimentais [29, 30, 31].

Como exemplo de um sistema Hamiltoniano transformado em mapa, L. Chotorlishvili [29] estudou a dinâmica caótica da função correlação de uma cadeia de spins acoplados. Neste trabalho, Chotorlishvili estabeleceu uma conexão entre as características dinâmicas de um sistema clássico com o tempo de correlação entre spins de uma rede quântica.

O modelo é baseado em uma molécula nanomagnética simples (*MNS*) [30, 31] e a Hamiltoniana é dada por [29]:

$$H = J \sum_n S_n^z S_{n+1}^z + g \sum_n (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y) + \beta \sum_n (S_n^z)^2, \quad (4.1)$$

onde  $J$  e  $g$  são constantes de interação entre os spins,  $\beta = -DS^2$  representa a altura

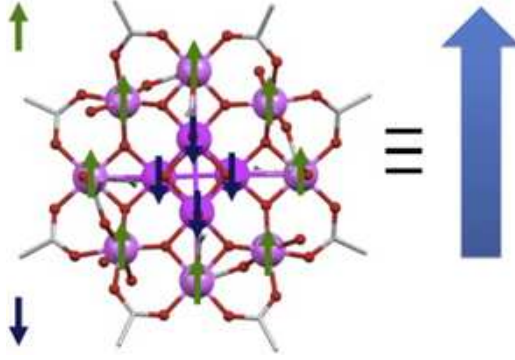


Figura 4.1: *Ilustração de uma molécula de acetato de  $Mn_{12}$ , protótipo representativo da família de uma Molécula Nanomagnética Simples (MNS) [31].*

de uma barreira anisotrópica,  $S^{x,y,z}$  são as projeções dos operadores de spin do modelo  $MNS$  e  $n$  representa os sítios onde se encontram os spins da rede.

## 4.1 Mapa do Modelo MNS

A transformação da Hamiltoniana descrita na Equação (4.1) em uma relação de recorrência requer algumas considerações, como as definições  $\epsilon = (J - g)$  e  $\beta = \pm\beta/g$  e as projeções dos operadores de spin, que são escritas como:

$$\begin{aligned} S_n^z &= \cos(\theta_n), \\ S_n^x &= \sin(\theta_n) \cos(\phi_n), \\ S_n^y &= \sin(\theta_n) \sin(\phi_n), \end{aligned} \quad (4.2)$$

que, ao serem substituídas na Equação (4.1) e considerar-se que o estado de equilíbrio do modelo satisfaça a condição de mínimo para  $H(\theta, \phi)$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_n} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \phi_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (4.3)$$

Chotorlishvili *et al.* [29] chegam ao mapa,

$$\begin{cases} S_{n+1} &= S_n - \beta [\sin(2\theta_n) - \frac{\epsilon}{2} \sin(4\theta_n)], \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \pi\nu + (-1)^\nu \arcsen(S_{n+1}), \end{cases} \quad (4.4)$$

em que  $\nu$  pode assumir os valores 0 e 1, o qual refere-se as duas possíveis soluções quando inverte-se a expressão trigonométrica  $S_{n+1}$  [29]. Este mapa é bastante interessante pois, a variável discreta  $n$ , que na Hamiltoniana original representa os diferentes sítios, aparece aqui como evolução temporal discreta. A matriz Jacobiana deste mapa é

$$\begin{aligned} J_{spin} &= \begin{pmatrix} \partial S_{n+1}/\partial S_n & \partial S_{n+1}/\partial \theta_n \\ \partial \theta_{n+1}/\partial S_n & \partial \theta_{n+1}/\partial \theta_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\beta[-\cos(2\theta_n) + \epsilon \cos(4\theta_n)] \\ \frac{1}{\sqrt{1-S_{n+1}^2}} & 1 + \frac{2\beta}{\sqrt{1-S_{n+1}^2}}\{-\cos(2\theta_n) + \epsilon \cos(4\theta_n)\} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

que tem como determinante,  $\det(J_{spin}) = 1$ , que é a característica de um mapa conservativo.

#### 4.1.1 Retrato de Fases

Pode-se inicialmente reproduzir alguns resultados para o mapa da Equação (4.4) ao construir o retrato de fases para parâmetros diferentes com o uso de  $\nu = 0$ . A Figura 4.2 utiliza-se dos parâmetros  $\beta = 0,05$  e  $\epsilon = 0,005$  e representa um retrato de fases  $(S_n; \theta_n)$  gerado com  $10^3$  iteradas a partir de  $50 \times 50$  condições iniciais para  $\theta$  e  $S$ . Interessante notar a semelhança com a Figura 2.2.

O retrato de fases para os parâmetros  $\beta = 0,3$  e  $\epsilon = 0,15$  pode ser visto na Figura 4.3. Esta figura e a 4.2 são resultados do trabalho de Chotorlishvili *et al.* em que as linhas contínuas/pontilhadas são as regiões regulares e estão em meio às regiões caóticas. Note que, conforme o tempo passa, a dinâmica observada é a dos spins ao longo da rede. Dependendo dos valores específicos do spin  $S$  e  $\theta$ , observa-se uma dinâmica que varia de regular até caótica. Isto significa também, que esta dinâmica se restringe a regiões espaciais ao longo da rede. Por exemplo, se uma condição inicial for dada dentro da região regular, a dinâmica fica dentro desta região para todos os tempos, ou seja, toda a rede será regular. Diz-se que cada condição inicial vai assumir uma rede específica. Pode-se, a partir de então, aplicar as técnicas discutidas no capítulo anterior para melhor entender este sistema.

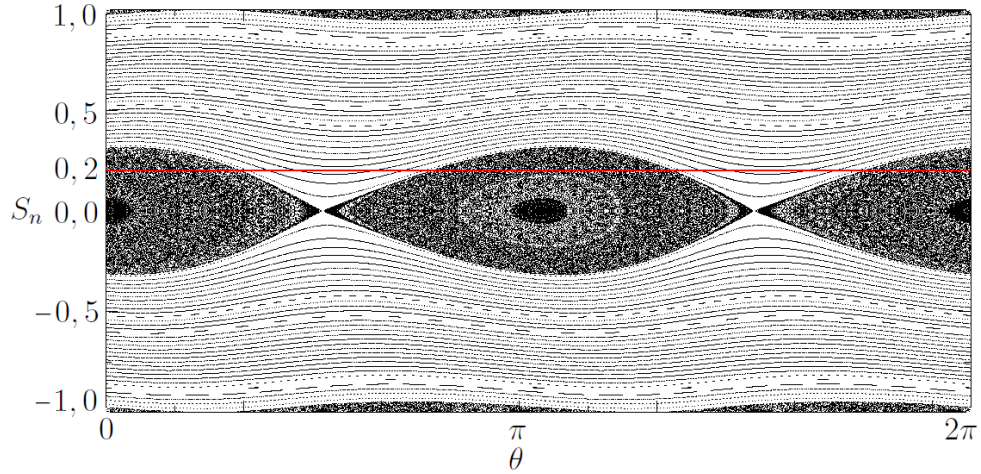


Figura 4.2: Retrato de fases para uma rede de spins. Os parâmetros para esta figura foram  $\beta = 0,05$ ,  $\epsilon = 0,005$ . Para esta figura,  $50 \times 50$  condições iniciais de  $(S_n; \theta_n)$  com  $10^3$  iteradas.

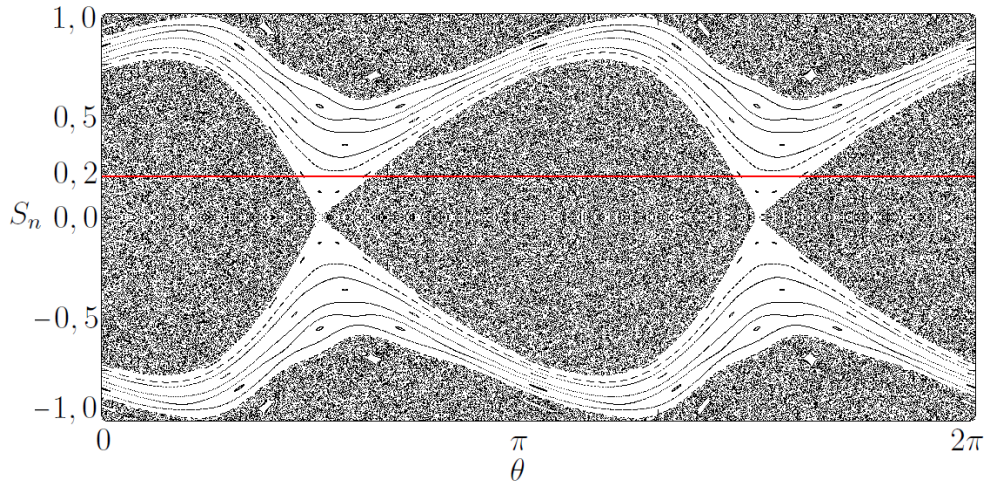


Figura 4.3: Retrato de fases para uma rede de spins. Os parâmetros para esta figura foram  $\beta = 0,3$ ,  $\epsilon = 0,15$ . Para esta figura,  $50 \times 50$  condições iniciais de  $(S_n; \theta_n)$  com  $10^3$  iteradas.

#### 4.1.2 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função de  $\beta$  e da linha de condições iniciais  $[0 < \theta < 2\pi]$  é apresentado na Figura 4.4, que foi gerada com o parâmetro  $\epsilon = 0,15$  e condição inicial  $S_n = 0,2$ . Nesta figura a barra de cores representa o valor de  $\lambda$  de maneira

que as regiões em cor preta são as que possuem  $\lambda = 0$  e posicionam-se no centro das ilhas regulares. As regiões em vermelho são as ilhas regulares e o restante das cores (barra de cores) são as regiões caóticas. A linha em  $\beta = 0,3$  pode ser comparada com o espaço de fases da Figura 4.3 pela linha  $S_n = 0,2$ . Observa-se em ambos os casos o cruzamento da linha em duas regiões regulares em meio ao mar caótico relacionando-se as duas figuras. A Figura 4.4 fornece as posições das regiões regulares e caóticas a partir de  $\lambda$  para vários valores do parâmetro  $\beta$  e da condição inicial  $\theta_0$ .

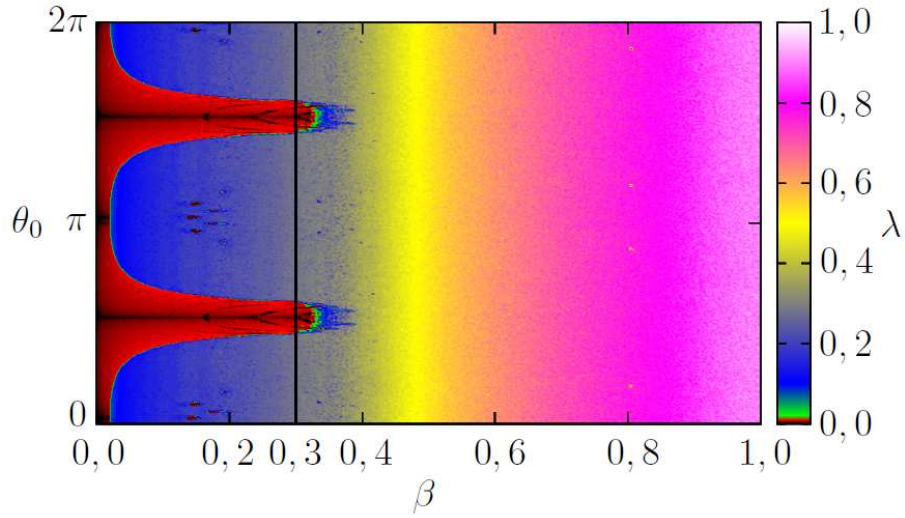


Figura 4.4:  $\lambda$  em função do parâmetro  $\beta$  e das condições iniciais  $0 < \theta < 2\pi$ . As linhas em preto são os centros das regiões regulares (vermelho).

A Figura 4.4 mostra que, para o caso de um espaço de fases construído com  $\beta \approx 0$ , sua formação se dá inteira por linhas regulares e não apresenta regiões caóticas. Ao aumentar-se gradualmente o valor de  $\beta$ , é possível verificar que as regiões caóticas aparecem a partir de  $\beta$  ainda pequeno, porém maior que zero. Curiosamente, para valores de  $\beta$  aproximadamente entre 0,1 e 0,2, é possível observar pequenas estruturas que representam pequenas ilhas regulares adicionais a duas maiores (pequenas manchas escuras na figura). Por fim, para  $\beta > 0,4$ , as ilhas desaparecem por completo.

## 4.2 Mapa MNS Dissipativo

Com o mesmo princípio utilizado na Seção 2.3.5, pode-se escrever o mapa dissipativo ao considerar um termo de perda de energia através das iteradas,  $\gamma$ . O mapa dissipativo segue como:

$$\begin{cases} S_{n+1} &= (1 - \gamma)S_n - \beta [\sin(2\theta_n) - \frac{\epsilon}{2} \sin(4\theta_n)] , \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \arcsen(S_{n+1}). \end{cases} \quad (4.6)$$

Ao ser calculada a matriz Jacobiana,

$$\begin{aligned} J_{dissip} &= \begin{pmatrix} \partial S_{n+1}/\partial S_n & \partial S_{n+1}/\partial \theta_n \\ \partial \theta_{n+1}/\partial S_n & \partial \theta_{n+1}/\partial \theta_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \gamma & 2\beta[-\cos(2\theta_n) + \epsilon \cos(4\theta_n)] \\ \frac{1-\gamma}{\sqrt{1-S_{n+1}^2}} & 1 + \frac{2\beta}{\sqrt{1-S_{n+1}^2}} \{-\cos(2\theta_n) + \epsilon \cos(4\theta_n)\} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

que tem como determinante,  $\det(J_{dissip}) = (1 - \gamma)$ , que é a característica de um mapa dissipativo e, para o caso  $\gamma = 0$ , o mapa retorna sua forma conservativa.

Para analisar o sistema quântico dissipativo correspondente, deve-se acoplar o sistema de spins a um banho térmico e resolver a equação de Schrödinger apropriada. Entretanto, este não é o objetivo deste trabalho o qual será limitado ao estudo da dinâmica clássica.

O espaço de fases dissipativo pode ser construído a fim de que seja verificado a forma como as trajetórias dissipativas buscam seus atratores. A Figura 4.5 mostra como as regiões regulares perdem suas formas conforme  $\gamma$  passa de  $10^{-4}$ , como descrito na Figura (a), para  $10^{-1}$ , como descrito na Figura (b), devido ao aparecimento de atratores. Estas figuras foram construídas com  $10^3$  iteradas a partir de  $50 \times 50$  condições iniciais para  $\theta$  e  $S$ .

### 4.2.1 Parâmetros

No estudo sobre o espaço de parâmetros do mapa de Henón [26], espera-se, para uma combinação de parâmetros, existir *Estruturas Isoperiódicas Estáveis* (EIEs) do qual acredita-se serem genéricas no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos não-lineares [25]. Pode-se fazer o mesmo estudo para o modelo do mapa da rede de spin

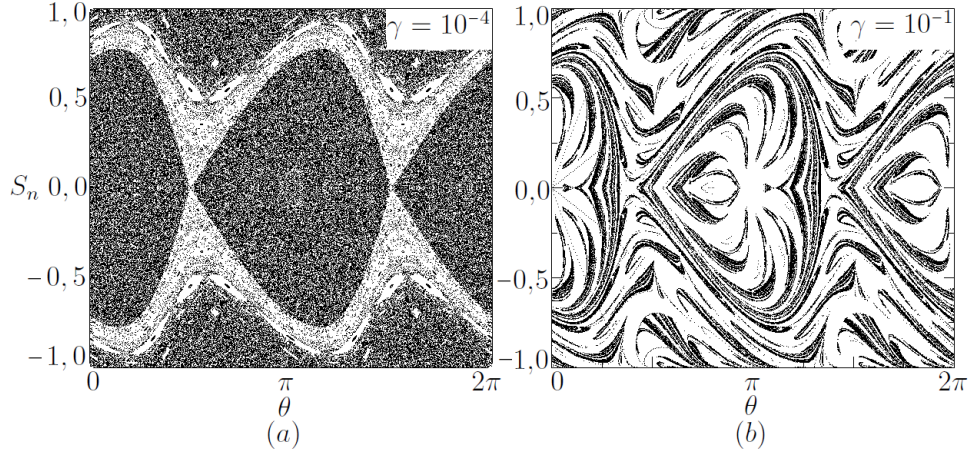


Figura 4.5: *Retrato de fases do mapa da rede de spins para duas dissipações diferentes. Na Figura (a),  $\gamma = 10^{-4}$ , enquanto que na Figura (b),  $\gamma = 10^{-1}$ .*

descrito neste capítulo para uma combinação entre os parâmetros  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\epsilon$  a fim de verificar a existência destas estruturas.

Com o cálculo de  $\lambda$  em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ , é possível construir a Figura 4.6 com o uso de  $\epsilon = 0,15$  e que apresenta algumas estruturas que podem ser exemplos de EIEs.

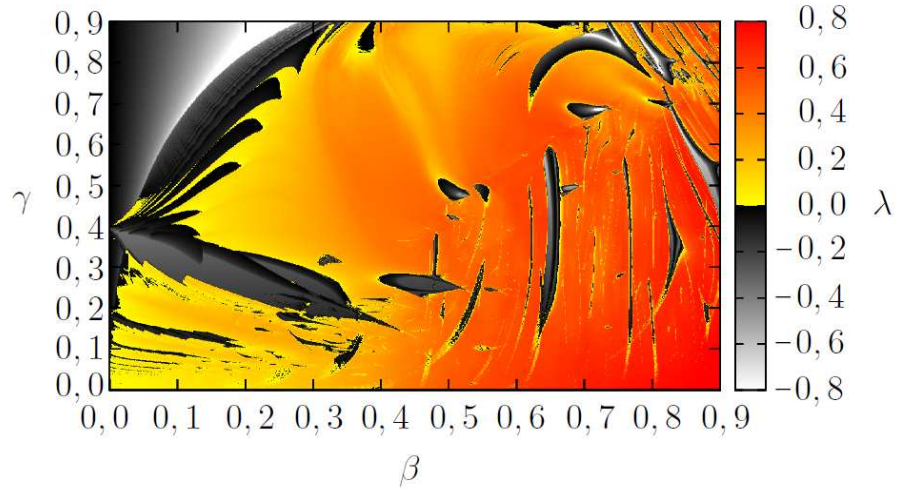


Figura 4.6: *Expoente de Lyapunov calculado em função dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ . Para este espaço de parâmetros,  $\epsilon = 0,15$  condição inicial dada no ponto  $(x_0; p_0) = (0, 2; 0, 3)$ .*



Para  $\lambda$  calculado em função de  $\epsilon$  e  $\gamma$ , pode-se construir a Figura 4.7 com o uso de  $\beta = 0,30$ . Algumas estruturas desta figura são candidatas as EIEs, como por exemplo, a região próxima do ponto  $(\epsilon; \gamma) \sim (0,75; 0,30)$ .

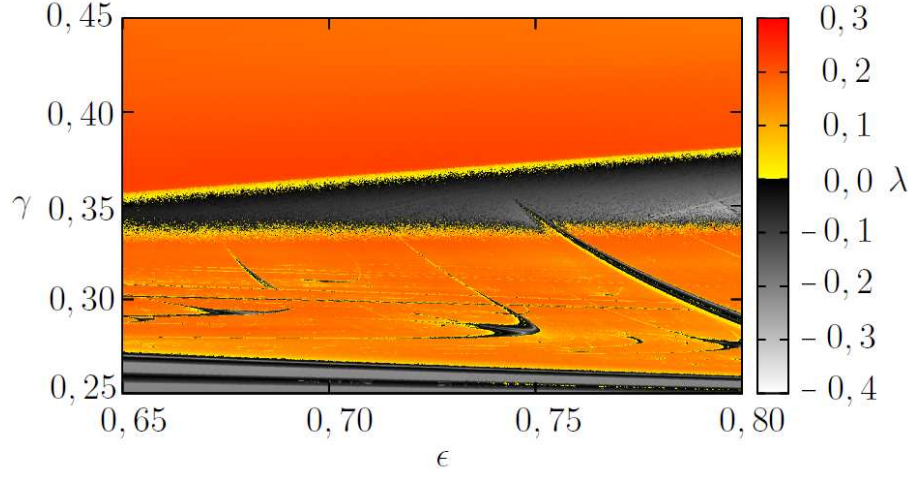


Figura 4.7: *Expoente de Lyapunov calculado em função dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\gamma$ . Para este espaço de parâmetros,  $\beta = 0,30$  e condição inicial dada no ponto  $(x_0; p_0) = (0,2; 0,3)$ .*

Os trabalhos deste capítulo realizados com uso do mapa da Equação (4.4) e os trabalhos do capítulo anterior com uso do mapa padrão, abrem caminhos para estudos futuros em outros sistemas dinâmicos que, após serem transformados em mapas, podem ser entendidos com um razoável nível de detalhes sobre a influência da inclusão de um termo de dissipação.



## Capítulo 5

# Conclusões e Perspectivas Futuras

Com os trabalhos desenvolvidos nesta tese, algumas conclusões podem ser destacadas:

Uma das propostas deste trabalho era entender os efeitos causados pela inclusão de um termo de dissipação em sistemas dinâmicos não lineares. Com isto, foi possível descrever as formações dos atratores em função da dissipação. Os atratores são os responsáveis por atrair as trajetórias pertencentes às regiões regulares que ficam próximas aos pontos periódicos ressonantes [4] e, como visto neste trabalho, atraem também as trajetórias pertencentes às regiões caóticas. Fazendo uso do mapa padrão dissipativo, foi possível verificar as quebras das curvas invariantes que circundavam os pontos ressonantes. Essas curvas, formadas pelos torus das regiões regulares, são atraídas aos seus respectivos atratores. Este comportamento causa deformações das curvas invariantes, o que faz com que as ilhas regulares percam suas formas originais [20, 21, 23, 62, 65].

Outra proposta deste trabalho, era fazer uso dos ELTFs para descrever a maneira com que as trajetórias são atraídas em função da intensidade da dissipação. Observou-se que, para um valor suficientemente alto da dissipação, as ilhas de período 4 convergiram para a ilha principal, de período 1, e o valor da dissipação com que este efeito ocorreu foi calculado e comparado com o aparecimento dos picos nos valores dos ELTFs.

Ao analisar os atratores para diferentes dissipações em trajetórias iniciadas em pontos ressonantes de diferentes ordens, verificou-se que as trajetórias parecem respeitar uma hierarquia nas escolhas dos atratores. O motivo pelo qual uma trajetória segue em direção a um determinado atrator também foi um dos problemas propostos neste trabalho que, com o cálculo das hiperbolicidades [46, 50, 51, 68], foi possível observar

a tendência das trajetórias percorrerem com mais facilidade as regiões hiperbólicas, o que pode interferir nas escolhas dos seus atratores. Esta análise foi possível com o uso de trajetórias iniciadas a partir dos pontos ressonantes de mesma ordem. Verificou-se que as trajetórias iniciadas em pontos hiperbólicos são atraídas mais rapidamente para os respectivos pontos ressonantes do que quando iniciadas em pontos não-hiperbólicos.

Com intenção de reproduzir uma aplicação diferente de um sistema dinâmico não-linear mas, capaz de estudar os efeitos devido a inclusão de um termo de dissipação em um sistema dinâmico, foi utilizado um mapa (conservativo) que modela uma rede de spins [29, 30, 31]. Além da construção dos retratos de fases para dois diferentes parâmetros, as regiões regulares e caóticas foram observadas com o uso dos ELTFs, bem como os pontos ressonantes. A existência de estruturas isoperiódicas estáveis (EIE) num espaço de parâmetros corresponde a existência de atratores periódicos numa região caótica [9, 25, 26, 66, 67]. Nesta tese, possíveis EIEs foram detectadas com uso dos espaços de condições iniciais e parâmetros.

Alguns trabalhos ainda ficam em aberto para, além de uma sequência do que já foi estudado nesta tese, dar início a novos trabalhos. Os ELTFs e as hiperbolicidades se mostraram ferramentas eficientes na descrição de sistemas dinâmicos e ainda podem ser mais explorados como sequência dos estudos desenvolvidos nesta tese.

O mapa que reproduz a rede de spins ainda pode ser mais bem investigado, não só na detecção de EIEs, bem como o uso das hiperbolicidades para entender as escolhas das trajetórias em função das dissipações.

# Bibliografia

- [1] H. POINCARÉ. Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique. Acta Math. Vol. 13, 1-271 (1890).
- [2] G. CASATI, B. V. CHIRIKOV, F. M. IZRAELEV, JOSEPH FORD. Stochastic Behavior of a Quantum Pendulum Under a Periodic Perturbation. Lecture Notes in Physics, Vol. 93, 334-352 (1977).
- [3] B. V. CHIRIKOV. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems. Physics Reports, Vol. 52, N. 5, 263-379 (1979).
- [4] A. J. LICHTENBERG, M. A. LIEBERMAN. Regular and Chaotic Dynamics. New York: Springer, Vol. 38 (1992).
- [5] G. CONTOPOULOS AND M. HARSOULA. Stickiness Effects in Conservative Systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 20, N. 7 2005-2043 (2007).
- [6] E. FERMI. On The Origin of the Cosmic Radiation. Physical Review, Vol. 75, 1169-1174 (1949).
- [7] J. C. WILLEMS. Dissipative Dynamical Systems, part I, General Theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 45, 321-351 (1972).
- [8] J. C. ROUX, R. H SIMOYI AND H. L. SWINNEY. Observation of a Strange Attractor. Physica D, Vol. 8, 257-266 (1983).
- [9] D. F. OLIVEIRA, M. ROBNIK, E. D. LEONEL. Shrimp-shape domains in a dissipative kicked rotator. Chaos, Vol. 21, 043122 (2011).

- [10] J. A. DE OLIVEIRA, E. D. LEONEL. The Effect of Weak Dissipation in Two-Dimensional Mapping. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 22, 1250248 (2012).
- [11] M. A. LIEBERMAN AND K. Y. TSANG. Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems. *Physical Review Letters*, Vol. 55, 908 (1985).
- [12] A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY AND J. A. VASTANO. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series. *Physica D*, Vol. 16, 285-317 (1985).
- [13] C. MANCHEIN AND M. W. BEIMS. Conservative Generalized Bifurcation Diagrams. *Physics Letters A*, Vol. 377, 789-793 (2013).
- [14] K. TSIGANIS, A. ANASTASIADIS AND H. VARVOGLIS. Dimensionality Differences Between Sticky and Non-Sticky Chaotic Trajectory Segments in a 3D Hamiltonian System. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 11, 2281-2292 (2000).
- [15] R. A. SÁNCHEZ, E. D. LEONEL, J. A. M. BERMUDEZ. Dynamical Properties of a Dissipative Discontinuous Map: A Scaling Investigation. *Physics Letters A*, Vol. 377, 3216-3222 (2013).
- [16] C. M. KUWANA, J. A. DE OLIVEIRA, E. D. LEONEL. A Family of Dissipative Two-Dimensional Mappings: Chaotic, Regular and Steady State Dynamics Investigation. *Physica A*, Vol. 395, 458-465 (2014).
- [17] G. SCHMIDT. Hamiltonian and Dissipative Chaos. *Annals New York Academy of Sciences*. Vol. 497, 97-109 (1987).
- [18] J. MCLAUGHLIN. Stochastic Behavior in Slightly Dissipative Systems. *Physical Review A*, Vol 20, 2114-2119 (1979).
- [19] Z. G. CAI AND Z. H. JUN. The Dynamical Feature of Transition of a Hamiltonian System to a Dissipative System. *Chinese Physics*, Vol. 13, 1009-1963 (2004).
- [20] C. CIUBOTARIU, L. BADELITA AND V. STANCU. Chaos in Dissipative Relativistic Standard Maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 13, 1253-1267 (2002).

- [21] C. S. RODRIGUES, A. P. S. DE MOURA, AND C. GREBOGI. Emerging Attractors and the Transition from Dissipative to Conservative Dynamics. *Physical Review E*, Vol. 80, 026205 (2009).
- [22] L. C. MARTINS AND J. A. C. GALLAS. Multistability, Phase Diagrams and Statistical Properties of the Kicked Rotor: A Map With Many Coexisting Attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 18, 1705-1717 (2008).
- [23] U. FEUDEL, C. GREBOGI, B. R. HUNT AND J. A. YORKE. Map With more than 100 coexisting low-period periodic attractors. *Physical Review E*, Vol. 54, 71-81 (1996).
- [24] U. FEUDEL, C. GREBOGI, L. POON AND J. A. YORKE. Dynamical Properties of a Simple Mechanical System With a Large Number of Coexisting Periodic Attractors. *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 9, 171-180 (1998).
- [25] A. CELESTINO, C. MANCHEIN, H. A. ALBUQUERQUE, M. W. BEIMS. Stable Structures in Parameter Space and Optimal Ratchet Transport. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 19, 193-149 (2014).
- [26] J. A. C. GALLAS. Structure of the Parameter of the Henón Map. *Physical Review Letters*, Vol. 70, 2714 (1993).
- [27] R. E. DE CARVALHO, C. V. ABUD AND F. C. SOUZA. Dissipation as a mechanism of energy gain. *Phys Rev E*, Vol. 77, 036204 (2008).
- [28] F. GINELLI, P. POGGI, A. TURCHI, H. CHATÉ, R. LIVI AND A. POLITI. Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors. *Physical Review Letters*, Vol. 99, 130601 (2007).
- [29] L. CHOTORLISHVILI, Z. TOKLIKISHVILI, A. KOMNIK AND J. BERAHDAR. Chaotic Dynamics and Spin Correlation Functions in a Chain of Nanomagnets. *Physical Review B*, Vol. 83, 184405 (2011).
- [30] H. B. HEERSCHE, Z. DE GROOT, J. A. FOLK, AND H. S. J. V. D. ZANT. Electron Transport Through Single  $Mn_{12}$  Molecular Magnets. *Physical Review Letters*, Vol. 96, 206801 (2006).

- [31] S. HILL. Magnetization Tunneling in high-symmetry  $Mn_{12}$  Single-Molecule Magnets. Polyhedron, Vol. 64, 128-135 (2013).
- [32] L. H. A. MONTEIRO. Sistemas Dinâmicos. Editora Livraria da Física, São Paulo, 3ª edição (2011).
- [33] E. OTT. Chaos in dynamical systems. University of Maryland, College Park, Maryland, USA, (1993).
- [34] N. F. FERRARA, C. P. C. DO PRADO. Caos: Uma Introdução. São Paulo, Ed. Edgard Blucher Ltda (1994).
- [35] J. B. NETO. Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. Editora Livraria da Física, São Paulo, 1ª edição (2004).
- [36] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, J. SAFKO. Classical Mechanics, Ed. Addison Wesley. 3ª edição (2001).
- [37] W. WENZEL, O. BIHAM, C. JAYAPRAKASH. Periodic Orbits in the Dissipative Standard Map. Phys. Rev. A, Vol. 43, 6550-6557 (1991).
- [38] J. G. FREIRE, C. BONATTO, C. C. DACAMARA, J. A. C. GALLAS. Multistability, Phase Diagrams, and Intransitivity in the Lorenz-84 low-Order Atmospheric Circulation Model. Chaos, Vol. 18, 033121 (2008).
- [39] C. M. WERNETH, M. DHAR, K. M. MAUNG, C. SIROLA AND J. NORBURY. Numerical Gram-Schmidt Orthonormalization. European Journal of Physics, Vol. 31, 693-700 (2010).
- [40] Z. YOU, E. J. KOSTELICH AND J. A. YORKE. Calculating stable and unstable manifolds. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 1, 605-623 (1991).
- [41] L. H. A. MONTEIRO, M. Y. KUCINSKI AND I. L. CALDAS. Coupling of modes in RFPs: Analytical approach, Plasma Phys. Control. Fusion, Vol. 37 541-550 (1995).
- [42] L. A. BUNIMOVICH AND L. V. V. AREVALO. Many Faces of Stickiness in Hamiltonian Systems. Chaos, Vol. 22, 026103 (2012).

- [43] G. M. ZASLAVSKY. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, Vol. 371, 461-580 (2002).
- [44] G. M. ZASLAVSKY. *Hamilton Chaos and Fractional Dynamics*. Department of Physics and Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, (2005).
- [45] B. V. CHIRIKOV. Resonance Processes in Magnetic Traps, *Plasma Phys.* Vol. 1, 253 (1960).
- [46] F. GINELLI, P. POGGI, A. TURCHI, H. CHATÉ, R. LIVI, AND A. POLITI. Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors. *Physical Review Letters*, Vol. 99, 130601 (2007).
- [47] J. P. W. D. WEELE, H. W. CAPEL, T. POST AND C. H. J. CALKOEN. Crossover from Dissipative to Conservative Behavior In Period-Doubling Systems, *Physica A*, Vol. 173, 1-43 (1986).
- [48] J. M. GREENE AND R. S. MACKAY, F. VIVALDI, AND M. J. FEIGENBAUM. Universal Behaviour in Families of Area-Preserving Maps, *Physica D*, Vol. 3 468-486 (1981).
- [49] G. REINOUT AND W. QUISPEL. Analytical crossover results for the Feigenbaum constants: Crossover from conservative to dissipative systems. *Physical Review A*, Vol. 31, 3924-3928 (1985)
- [50] S. R. LOPES, P. P. GALUZIO, T. S. KRÜGER, J. D. SZEZECH JR, R. L. VIANA, T. DE L. PRADO. Artigo em preparação.
- [51] S. R. LOPES, J. D. SZEZECH JR., R. F. PEREIRA, A. A. BERTOLAZZO, AND R. L. VIANA. Anomalous Transport Induced by Nonhyperbolicity, *Physical Review E*, Vol. 86, 016216 (2012).
- [52] G. BIRKHOFF. *Dynamical Systems*. Ed. AMS books (1927).
- [53] H. L. SWINNEY AND J. P. GOLLUB. In *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (eds), Springer-Verlag, New York, chapter 2 (1985).

- [54] G. BENETTIN, L. GALGANI, A. GIORGILLI AND J. M. STRELCYN. Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems, *meccanica*, 9-21 (1980).
- [55] I. SHIMADA AND T. NAGASHIMA. A numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems, *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 61,, 1605-1617 (1979).
- [56] P. C. RECH, M. W. BEIMS, J. A. C. GALLAS. Basin Size Evolution Between Dissipative and Conservative Limits. *Physical Review E*, Vol. 71, 017202 (2005).
- [57] E. L. DE OLIVEIRA. Análise da Dinâmica de um Pêndulo Elástico com Excitação Vertical no Suporte. Instituto de biociências, letras e ciências exatas, UNESP, dissertação, (2006).
- [58] V. FRANCESCHINI AND L. RUSSO. Stable and Unstable Manifolds of the Henon Mapping. *Journal of Statistical Physics*, Vol. 25, 757-769 (1981).
- [59] A. M. DAVIE AND T. K. DUTTA. Period-Doubling in Two-Parameter Families. *Physica D*, Vol. 64, 345-354 (1993).
- [60] G. SCHMIDT AND B. W. WANG, Dissipative Standard Map, *Physical Review A*, Vol. 32, 2994 (1985).
- [61] M. A. SAVI. Dinâmica Não Linear e Caos. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE - Engenharia Mecânica, 1ª edição (2006).
- [62] D. A. BUROV, D. L. GOLITSYN AND O. I. RYABKOV. Study of the Passage from a Dissipative to a Conservative State in Two-Dimensional Nonlinear Systems of Ordinary Differential Equations. *Differential Equations*, Vol. 48, 436-440 (2012).
- [63] E. LEGA, G. D. PENNA, C. FROESCHLÉ AND A. CELLETTI. On the computation of Lyapunov exponents for discrete time series. Applications to two-dimensional symplectic and dissipative mappings, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 10, 2791-2805 (2000).
- [64] F. GROND, H. H. DIEBNER. Local Lyapunov exponents for dissipative continuous systems. *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 23, 1809-1817 (2005).



- [65] A. CELLETTI, S. DI RUZZA, C. LHOTKA, AND L. STEFANELLI. Nearly-Integrable dissipative systems and celestial mechanics. The European Physical Journal Special Topics, Vol. 186, 33-66 (2010).
- [66] R. VITOLO, P. GLENDINNING, AND J. A. C. GALLAS. Global Structure of Periodicity Hubs in Lyapunov Phase Diagrams of Dissipative Flows, MIMS EPrint, Vol. 57, (2011).
- [67] D. F. M. OLIVEIRA AND E. D. LEONEL. Parameter Space for a Dissipative Fermi-Ulam Model. New Journal of Physics, Vol. 13, 123012 (2011).
- [68] F. GINELLI, H. CHATÉ, R. LIVI AND A. POLITI. Covariant Lyapunov Vectors. (2012). [arXiv.org > nlin > arXiv:1212.3961v1](https://arxiv.org/abs/1212.3961).